

Bioestatística

para Biologia, Enfermagem, Farmácia e Nutrição

Códigos: MAD231 / MAD125 / MAD 237 / MAD120

Oferecido pelo:

DEPARTAMENTO DE MÉTODOS ESTATÍSTICOS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Modelos Determinísticos e Probabilísticos

- **Modelo determinístico:** Pode ser descrito facilmente através de uma fórmula

Exemplo: Corpo em queda livre no vácuo. A velocidade final, em cm/s, é dada por $v = \sqrt{2gh}$, onde g é a aceleração da gravidade (em cm/s²) e h é a altura inicial (em cm).

- **Modelo probabilístico:** Sabemos os possíveis resultados do experimento, mas não sabemos (ou é extremamente difícil) precisá-lo.

Exemplo: Lançamento de uma moeda ou lançamento de um dado.

Definições básicas

- Um *experimento* é qualquer processo, real ou hipotético, no qual os resultados podem ser identificados ao longo do tempo
- O *espaço amostral* é a coleção de todos os possíveis resultados de um experimento. Usualmente denotado pela letra Ω . Elementos do espaço amostral são usualmente denotados pela letra ω .
- Um *evento* A é um subconjunto do espaço amostral Ω .

Exemplo

Lançamento de uma moeda: Se $\text{Cara} \leftrightarrow 0$ e $\text{Coroa} \leftrightarrow 1$, então

$$\Omega = \{0, 1\}.$$

Alguns eventos de interesse:

- “ A : o lançamento foi coroa”: $A = \{1\}$.
- “ B : o lançamento foi cara”: $B = \{0\}$.
- “ C : o lançamento é cara ou coroa”: $C = \{0, 1\} = \Omega$.

Exemplo

Lançamento de duas moedas: Se $\text{Cara} \leftrightarrow 0$ e $\text{Coroa} \leftrightarrow 1$, então

$$\Omega = \{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

Alguns eventos de interesse:

- “ A_j : o j -ésimo lançamento foi coroa”:

$$A_1 = \{(1, 0), (1, 1)\}$$

$$A_2 = \{(0, 1), (1, 1)\}$$

- “pelo menos um lançamento foi coroa”:

$$B = A_1 \cup A_2 = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

- “todos lançamentos foram cara”: $C = \{(0, 0)\}$

Operações em Conjuntos e Diagramas de Venn

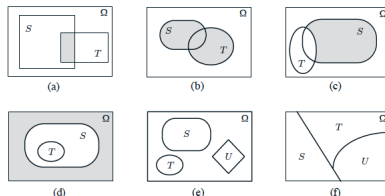


Figura 1: Ω é o espaço amostral enquanto S , T e U são eventos.

- a) A região sombreada é $S \cap T$.
- b) A região sombreada é $S \cup T$.
- c) A região sombreada é $S \cap T^c$.
- d) $T \subset S$ e a região sombreada é S^c .
- e) T , S e U são *disjuntos*.
- f) T , S e U formam uma *partição* de Ω .

Algumas Propriedades Úteis

- Denotamos o conjunto vazio por $\emptyset$
- Para subconjuntos $A, B, C \subseteq \Omega$ vale que:

$$\blacksquare A^c \cup A = \Omega$$

$$\blacksquare A \cap A^c = \emptyset$$

$$\blacksquare (A^c)^c = A$$

$$\blacksquare A \cup \Omega = \Omega$$

$$\blacksquare A \cap \Omega = A$$

$$\blacksquare A \cup (B \cap C) = \\ (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\blacksquare A \cap (B \cup C) = \\ (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- **Leis de de Morgan:** se $A_1, A_2, \dots, A_n$ são eventos em Ω , então

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c \quad \text{e} \quad \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$$

Definição Clássica de Probabilidade

Seja A um evento de um espaço amostral Ω finito. A *probabilidade* do evento A é definida por

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{número de resultados favoráveis a } A}{\text{número total de resultados em } \Omega}$$

Notação: $|A|$ denota a cardinalidade (i.e., quantidade de elementos) do evento A .

Hipóteses:

- Resultados equiprováveis (sorteio ao acaso)!
- Espaço amostral Ω finito!

Exemplo

Lançamento de uma moeda honesta. Lembre que $\textit{Cara} \leftrightarrow 0$ e $\textit{Coroa} \leftrightarrow 1$, de modo que

$$\Omega = \{0, 1\} \text{ e } |\Omega| = 2.$$

- “ A : o lançamento foi coroa”. Como $|A| = |\{1\}| = 1$:
 $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$.
- “ B : o lançamento foi cara”. Como $|B| = |\{0\}| = 1$:
 $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$.
- “ C : o lançamento é cara ou coroa”. Como
 $|C| = |\{0, 1\}| = 2$: $\mathbb{P}(C) = \frac{2}{2} = 1$.

Exemplo

Lançamento de duas moedas honestas. Lembre que $\text{Cara} \leftrightarrow 0$ e $\text{Coroa} \leftrightarrow 1$, de modo que

$$\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \text{ e } |\Omega| = 4.$$

- “ A_1 : o primeiro lançamento foi coroa”.

$$\text{Como } |A_1| = |\{(1, 0), (1, 1)\}| = 2 : \mathbb{P}(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

- “ B : pelo menos 1 lançamento foi coroa”.

$$\text{Como } |B| = |\{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}| = 3 : \mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}.$$

- “ C : todo os lançamentos foram cara”.

$$\text{Como } |C| = |\{(0, 0)\}| = 1 : \mathbb{P}(C) = \frac{1}{4}.$$

Exemplo

Se jogarmos dois dados honestos, qual dos resultados é mais provável: a soma ser 11 ou a soma ser 12?

Solução: O espaço amostral do lançamento de dois dados é

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{1, \dots, 6\} \text{ para } 1 \leq i \leq 2\}.$$

Para cada resultado individual possível $w \in \Omega$:

$$\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{36}.$$

Os eventos de interesse são:

- “A soma de 11”: $A = \{(5, 6), (6, 5)\}$
- “A soma de 12”: $B = \{(6, 6)\}$

Logo, $\mathbb{P}(A) = 2/36 > 1/36 = \mathbb{P}(B)$.

Técnicas de Contagem – Regra da multiplicação

Rotas entre cidades: Assuma que existem três rotas distintas entre as cidades A e B e cinco rotas distintas entre as cidades B e C . Quantas rotas distintas existem entre as cidades A e C ?

Solução: Listar as possíveis rotas:

- Rotas entre A e B : $AB = \{1, 2, 3\}$
- Rotas entre B e C : $BC = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
- Rotas entre A e C :
 $AC = AB \times BC = \{(1, 4), (1, 5), \dots, (3, 8)\}$, que é um conjunto com $3 \times 5 = 15$ elementos.

Exemplo: Regra da Multiplicação e DNA

Existem 4 bases nitrogenadas que formam o DNA: Adenina (A), Citosina (C), Guanina (G) e Timina (T). O genoma humano é formado por uma sequência de 3 bilhões de pares de bases nitrogenadas!

Pergunta: Quantas sequências possíveis de 10 pares de bases nitrogenadas podem ser formadas?

Exemplo: Regra da Multiplicação e RNA

Existem 4 bases nitrogenadas que formam o RNA: Adenina (A), Citosina (C), Guanina (G) e Uracila (U). Aminoácidos são formados por 3 bases nitrogenadas em sequência (códon), havendo degeneração (redundância). Por exemplo, todos os códons iniciados por GU codificam o aminoácido Valina, enquanto que o Ácido Aspártico é formado apenas pelas sequências GAU ou GAC.

Pergunta: Assumindo que as diferentes sequências de bases nitrogenadas sejam igualmente prováveis, qual é a proporção de Valina no universo de aminoácidos iniciados pela base nitrogenada Guanina (G)?

Exemplo (Problema do Aniversário)

Existem k pessoas em uma sala. Supondo que o aniversário de cada pessoa é igualmente provável e que não há gêmeos na sala, qual a probabilidade de que duas ou mais pessoas celebrem o aniversário no mesmo dia?

Solução: Se A denota o evento “nenhuma das k pessoas fazem aniversário no mesmo dia”, então queremos calcular $\mathbb{P}(A^c)$. Nesse exemplo, $\Omega = \{1, \dots, 365\}^k$. Note que $|\Omega| = 365^k$ e

$$|A| = \frac{365!}{(365 - k)!} = 365 \cdot 364 \cdots (365 - k + 1).$$

Logo,

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - k + 1)}{365^k}.$$

Exemplo (Problema do Aniversário)

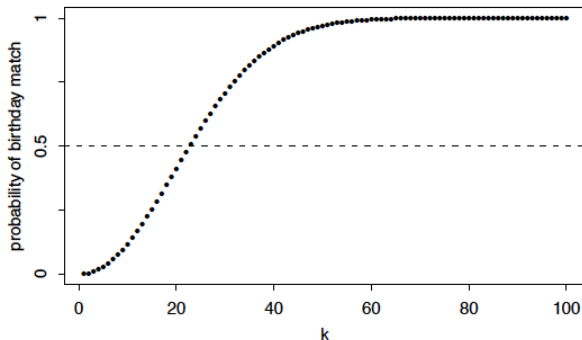


Figura 2: Probabilidade de que em um grupo de k pessoas duas ou mais celebrem aniversário no mesmo dia. Essa probabilidade excede $1/2$ para $k = 23$.

Técnicas de Contagem – Permutação e Combinação

De quantas formas podemos sortear k elementos de um conjunto de tamanho n ?

Uma **permutação de k elementos** é quando a ordem de sorteio importa, e a quantidade de possíveis permutações é dado por

$$P_{n,k} = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Uma **combinação de k elementos** é quando a ordem de sorteio não importa, e a quantidade de possíveis combinações é dada por

$$\binom{n}{k} = \frac{P_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemplo

Full House em uma mão de Pôquer: Uma mão de 5 cartas é extraída sem reposição de um baralho de 52 cartas. Uma mão é chamada *Full House* se há 3 cartas do mesmo valor e 2 outras cartas do mesmo valor. Se o baralho foi embaralhado de forma que cada carta tenha a mesma chance de aparecimento, qual é a probabilidade de se obter um *Full House*?

Solução: Seja A o evento “a mão é um *Full House*”. Temos que

$$|A| = 13 \binom{4}{3} 12 \binom{4}{2} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(A) = \frac{13 \binom{4}{3} 12 \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} \approx 0,00144.$$

Propriedades Gerais das Probabilidades

A noção de probabilidade pode ser definida em contextos mais gerais de forma que sempre serão válidas as seguintes propriedades:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0$ e $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (consequentemente $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$).
2. Para eventos $(A_i)_{i \geq 1}$ (2 a 2) disjuntos ou mutuamente exclusivos (isto é $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$):

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

Observe que das duas propriedades acima decorre que

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Eventos Mutuamente Exclusivos

- A e B mutuamente exclusivos $\Rightarrow$
 $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 0$.
- $A_1, \dots, A_n$ com interseção vazia $\Rightarrow A_1 \cap \dots \cap A_n = \emptyset$
- $A_1, \dots, A_n$ (2 a 2) mutuamente exclusivos $\Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
para todos os pares $i \neq j$.
- **Conclusão:** Interseção vazia e exclusão mútua 2 a 2 **não**
são a mesma coisa!

Exemplo: Eventos Mutuamente Exclusivos

Considere o lançamento de um dado e o evento $A = \{2, 3, 4, 5\}$.

- Usando **corretamente** o conceito de exclusão mútua 2 a 2:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\}) \\ &= \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) = 4/6.\end{aligned}$$

- Usando **incorretamente** o conceito de exclusão mútua:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\{2, 3\} \cup \{2, 4\} \cup \{5\}) \\ &= \mathbb{P}(\{2, 3\}) + \mathbb{P}(\{2, 4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) = 4/6 + 1/6.\end{aligned}$$

Princípio da Inclusão e Exclusão

Também temos que

1. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
2. Para 3 eventos A, B e C :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ &\quad - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ &\quad + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Leis de Morgan

1. Primeira Lei de Morgan:

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = 1 - \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n A_i^c \right)$$

“Pelo menos 1 dos A_i 's ocorrer” é o complementar do evento “Nenhum dos A_i 's ocorrer”.

2. Segunda Lei de Morgan:

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) = 1 - \mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c \right)$$

“Todos os A_i 's ocorrerem” é o complementar do evento “Pelo menos um dos A_i 's não ocorre”.

Exemplo (Não Equiprovavel)

De uma dada população, 42% são ruivos, 35% têm olhos azuis e 20% são ruivos de olhos azuis. Escolhido ao acaso uma pessoa dessa população, qual a probabilidade de

- Ser ruivo ou ter olhos azuis?
- Não ser ruivo e nem ter olhos azuis?
- Ser ruivo mas não ter olhos azuis?

Solução: As **características** são cabelo ruivo (r)/não-ruivo ($\bar{r}$) e olhos azuis (a)/olhos não-azuis ($\bar{a}$). Espaço amostral:

$$\Omega = \{(r, a), (\bar{r}, a), (r, \bar{a}), (\bar{r}, \bar{a})\}$$

Eventos de interesse:

R = “A pessoa escolhida é ruiva” = $\{(r, a), (r, \bar{a})\}$.

A = “A pessoa tem olhos azuis” = $\{(r, a), (\bar{r}, a)\}$.

$R \cap A$ = “A pessoa é ruiva e tem olhos azuis” = $\{(r, a)\}$.

Exemplo (Não Equiprovável)

Observação: Como Ω é não-equiprovável, é **ERRADO** escrever

$$\mathbb{P}(A) = 2/4, \mathbb{P}(R) = 2/4 \text{ e } \mathbb{P}(A \cap R) = 1/4.$$

O enunciado nos dá

$$\mathbb{P}(R) = 0,42, \mathbb{P}(A) = 0,35 \text{ e } \mathbb{P}(A \cap R) = 0,2.$$

Note que, nesse caso

$$p(r, a) = \mathbb{P}(\{(r, a)\}) = \mathbb{P}(A \cap R) = 0,2.$$

Exemplo (Não Equiprovavel)

- a) Ser ruivo ou ter olhos azuis: $R \cup A$

$$\mathbb{P}(A \cup R) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R) - \mathbb{P}(A \cap R) = 0,35 + 0,42 - 0,2 = 0,57.$$

- b) Não ser ruivo e não ter olhos azuis:

$$R^c \cap A^c = \{(\bar{r}, \bar{a})\}$$

$$\mathbb{P}(A^c \cap R^c) = 1 - \mathbb{P}((A^c \cap R^c)^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup R) = 1 - 0,57 = 0,43.$$

- c) Ser ruivo e não ter olhos azuis: $R \cap A^c = \{(r, \bar{a})\}$

$$\mathbb{P}(R \cap A^c) = \mathbb{P}(R) - \mathbb{P}(R \cap A) = 0,42 - 0,2 = 0,22.$$

Exemplo (Espaço Amostral Infinito)

Suponha que lancemos uma moeda honesta até obtermos o primeiro resultado “cara”, sendo o observável do experimento o número de lançamentos necessários. Para esse experimento temos $\Omega = \{1, 2, \dots\}$ e

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Para ver que a soma resulta em 1, podemos usar a progressão geométrica de termo $p \in (0, 1)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k = 1 + p + p^2 + \dots = \frac{1}{1-p}.$$

Como ficariam as probabilidades caso a moeda não fosse necessariamente honesta?

Probabilidade condicional

Considere uma probabilidade $\mathbb{P}$ definida em um espaço amostral Ω . Para eventos A e B com $\mathbb{P}(B) > 0$, a *probabilidade condicional* de A dado B é definida como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

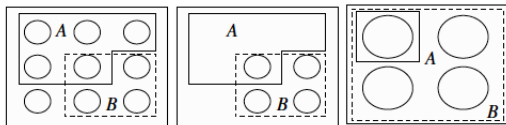


Figura 3: Da esquerda para direita: a) Eventos A e B do espaço amostral. b) Como sabemos que B ocorreu, descartamos todos resultados em B^c . c) No espaço amostral restrito, renormalizamos de modo que a massa total seja 1.

Exemplo

De uma dada população, 42% são ruivos, 35% têm olhos azuis e 20% são ruivos de olhos azuis. Escolhido ao acaso uma pessoa dessa população, qual a probabilidade de

- Ser ruivo dado que a pessoa tem olhos azuis?
- Não ser ruivo dado que a pessoa tem olhos azuis?
- Ser ruivo dado que a pessoa não tem olhos azuis?

Exemplo

Lançamos uma moeda honesta três vezes. Sejam A o evento “mais caras do que coroas” e B o evento “o primeiro lançamento é cara”. Determine $\mathbb{P}(A|B)$.

Solução: Denotando $\textit{Cara} \leftrightarrow 0$ e $\textit{Coroa} \leftrightarrow 1$, temos que o espaço amostral $\Omega = \{0, 1\}^3$, e os eventos A e B são dados por

$$A = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$B = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1)\}.$$

Logo,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{3}{8} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = 1/2$$

de forma que

$$\mathbb{P}(A|B) = 3/4.$$

Independência

Considere uma probabilidade $\mathbb{P}$ definida em um espaço amostral Ω . Dois eventos A e B são *independentes* se

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Observação: Lembre que para quaisquer eventos A e B , $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)$. Assim, se A e B forem independentes teremos que $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$. Em palavras, a ocorrência de A não influi nas chances relativas de B .

Teorema. Seja $\mathbb{P}$ uma probabilidade definida em um espaço amostral Ω . Se A e B são eventos independentes, então também o são os eventos A^c e B , A e B^c , e A^c e B^c .

Exemplo

No lançamento de um dado equilibrado, o evento A representa “um número par é obtido” e o evento B representa “algum dos números 1, 2, 3, ou 4 é obtido”. Apesar de fisicamente relacionados, tais eventos são independentes!

Solução: Note que:

- $\mathbb{P}(A) = 1/2$
- $\mathbb{P}(B) = 2/3$
- $(A \cap B) = \{2, 4\}$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/3 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Independência: $A_1, \dots, A_n$

Os eventos $A_1, \dots, A_n$ são *independentes dois a dois*, se os eventos A_i e A_j são independentes para todo $i \neq j$.

Os eventos $A_1, \dots, A_n$ são *independentes* se

$$\mathbb{P}(\cap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)$$

para qualquer subconjunto $J \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Observação

Independência 2 a 2 **não implica** independência.

De fato, no lançamento de 2 moedas honestas independentes, os eventos A = “primeira lançamento é cara”, B = “segundo lançamento é cara” e C = “os dois lançamentos são iguais” são independentes dois a dois, mas não são independentes.

Exemplo

Considere três regiões geográficas, A , B e C , distantes o suficiente uma da outra de modo que seja razoável supor independência entre os regimes de chuva nos 3 territórios. De acordo com as previsões meteorológicas do dia, estima-se que as probabilidades de ocorrência de chuva forte sejam de $2/3$ na região A , $3/4$ na região B e $1/2$ na região C . Considerando-se as estimativas como verdadeiras, calcule a probabilidade:

- a) de que chova forte em pelo menos uma região;
- b) de que chova forte somente em uma das regiões;
- c) de que ocorra chuva forte em no máximo uma das três regiões; e
- d) condicional de chuva forte na região A , dado que choveu forte em no máximo uma das três regiões.

Solução: Considere os eventos

A = “chuva forte na região A”,

B = “chuva forte na região B”,

C = “chuva forte na região C”,

D = “chuva forte em pelo menos uma região”,

E = “chuva forte somente em uma das regiões”,

F = “chuva forte em no máximo uma das 3 regiões”.

- a) Queremos calcular $\mathbb{P}(D)$. Para isso, use a independência de A^c, B^c e C^c para calcular $\mathbb{P}(D^c)$ e lembre que

$$\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}(D^c) = 1 - \frac{1}{24} = 23/24.$$

b) Escreva o evento E como

$$E = \{A \cap B^c \cap C^c\} \cup \{A^c \cap B \cap C^c\} \cup \{A^c \cap B^c \cap C\},$$

e use a independência dos eventos para obter

$$\mathbb{P}(E) = \frac{1 + 3 + 2}{24} = \frac{1}{4}.$$

c) Note que $F = D^c \cup E$, e use a independência dos eventos para obter

$$\mathbb{P}(F) = \frac{1 + 1 + 3 + 2}{24} = \frac{7}{24}.$$

d) Temos que

$$\mathbb{P}(A|F) = \frac{\mathbb{P}(A \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B^c \cap C^c)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{2/24}{7/24} = \frac{2}{7}.$$

Regra da Multiplicação

Teorema: (**Regra da multiplicação**) Se A e B são eventos com probabilidade positiva, então

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B).$$

Mais geralmente, se $A_1, \dots, A_n$ são eventos tais que $\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right)$ tem probabilidade positiva para todo $1 \leq k \leq (n-1)$, então

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Exemplo

Três cartas são extraídas, sem reposição, de um baralho com 52 cartas. Assumindo que em cada extração, cada uma das cartas restantes têm a mesma chance de ser escolhida, determine a probabilidade de nenhuma das três cartas seja de copas.

Solução: Defina para cada $i = 1, 2, 3$, o evento

$$A_i = \text{“a } i\text{-ésima carta não é de copas”}.$$

Note que $\mathbb{P}(A_1) = 39/52$, $\mathbb{P}(A_2|A_1) = 38/51$ e $\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = 37/50$. Logo, pela regra da multiplicação,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{39}{52} \times \frac{38}{51} \times \frac{37}{50}.\end{aligned}$$

Partição de um Espaço Amostral

Os eventos $A_1, \dots, A_n$ formam uma **partição** do espaço amostral Ω se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todos $1 \leq i, j \leq n$ com $i \neq j$.

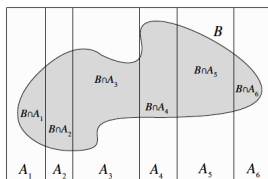


Figura 4: Partição $A_1, \dots, A_6$ do espaço amostral.

Para qualquer evento $B \subseteq \Omega$: $B = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)$.

Lei da Probabilidade Total

Teorema: (**Lei da Probabilidade Total**) Considere $A_1, \dots, A_n$ formam uma partição de Ω tal que $P(A_i) > 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Para todo evento B , temos que

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n).$$

Exemplo

João decide participar de um torneio de xadrez, onde a metade dos jogadores é profissional (Tipo 1), um quarto é semi-profissional (Tipo 2) e um quarto é amador (tipo 3). Suponha que as probabilidades do João vencer uma partida sejam 0,3; 0,4 e 0,5, se o adversário for respectivamente do Tipo 1, Tipo 2 e Tipo 3. Se um adversário é escolhido ao acaso, determine a probabilidade do João sair vitorioso.

Exemplo (continuação)

Solução: Defina para cada $i = 1, 2, 3$, o evento

$A_i =$ “o adversário escolhido é do tipo i ”.

Temos que $\mathbb{P}(A_1) = 0,5$, $\mathbb{P}(A_2) = 0,25$ e $\mathbb{P}(A_3) = 0,25$. Defina B o evento “João saiu vitorioso”. Temos que $\mathbb{P}(B|A_1) = 0,3$, $\mathbb{P}(B|A_2) = 0,4$ e $\mathbb{P}(B|A_3) = 0,5$. Assim, pela lei da probabilidade total

$$\begin{aligned} P(B) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(B|A_3) \\ &= 0,375. \end{aligned}$$

Teorema de Bayes

Teorema: (Teorema de Bayes) Se A e B são eventos com probabilidade positiva, então

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Além disso, se $A_1, \dots, A_n$ formam uma partição de Ω tal que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, então

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n)}.$$

Exemplo

Considere duas moedas, sendo uma honesta e a outra *viesada* cuja probabilidade de cara é $3/4$. Escolhemos uma das moedas ao acaso e, então, efetuamos três lançamentos. Em todos os lançamentos o resultado foi cara. Dado essa informação, qual é a probabilidade de a moeda honesta ter sido escolhida?

Exemplo (continuação)

Solução: Sejam A o evento “em todos os lançamentos o resultado foi cara” e F o evento “a moeda honesta foi escolhida”. Queremos calcular $\mathbb{P}(F|A)$. É imediato calcular $\mathbb{P}(A|F)$ e $\mathbb{P}(A|F^c)$:

$$\mathbb{P}(A|F) = 1/8 = (1/2)^3 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(A|F^c) = (3/4)^3.$$

Também temos que $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F^c) = 1/2$. Logo, pelo Teorema de Bayes e a Lei da Probabilidade total:

$$\mathbb{P}(F|A) = \frac{\mathbb{P}(F)\mathbb{P}(A|F)}{\mathbb{P}(F)\mathbb{P}(A|F) + \mathbb{P}(F^c)\mathbb{P}(A|F^c)} \approx 0,23.$$

Aplicação: Teste de Diagnóstico

Um paciente é testado para uma doença que atinge a população e seja D o evento “o paciente testado tem a doença” e T o evento “o resultado do teste para esse paciente é positivo”.

- Sensibilidade do teste = $\mathbb{P}(T \mid D)$.
- Especificidade do teste = $\mathbb{P}(T^c \mid D^c)$.
- Falso Negativo: $\mathbb{P}(T^c \mid D) = 1 - \text{sensibilidade}$.
- Falso Positivo: - $\mathbb{P}(T \mid D^c) = 1 - \text{especificidade}$.

Suponha que uma doença esteja presente em 1% da população, i.e. $\mathbb{P}(D) = 0,01$, e que a sensibilidade e especificidade do teste sejam de 95%, i.e. $\mathbb{P}(T \mid D) = 0,95 = \mathbb{P}(T^c \mid D^c)$. Calcule $\mathbb{P}(D \mid T)$.

Aplicação: Teste de Diagnóstico (continuação)

Solução: Pelo Teorema de Bayes e a Lei da Probabilidade total:

$$\mathbb{P}(D|T) = \frac{\mathbb{P}(D)\mathbb{P}(T|D)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(D)\mathbb{P}(T|D)}{\mathbb{P}(D)\mathbb{P}(T|D) + \mathbb{P}(D^c)\mathbb{P}(T|D^c)} \approx 0,16.$$

Observação: Antes de ser feito o teste, as chances eram de 1 em 100 (probabilidade a priori). Depois do teste dar positivo, as chances aumentam para 16 em 100 (probabilidade a posteriori). Apesar da probabilidade a posteriori não ser muito alta (muito em função da priori ser pequena), ela é 16 vezes maior que a probabilidade a priori.

Variáveis Aleatórias - Conceito Geral

Variáveis aleatórias podem ser categóricas, ou fornecerem “resumos numéricos” de um experimento aleatório representado.

Observação: Variáveis aleatórias serão denotadas em geral por letras maiúsculas do final do alfabeto, como por exemplo X , Y e Z .

Exemplos

1. Em um experimento envolvendo o lançamento de 3 dados, são variáveis aleatórias:
 - a) A paridade (par ou ímpar) de cada face;
 - b) A soma das 3 faces;
 - c) O número de dados com face igual a 4;
 - d) O valor da maior face obtida; e
 - e) O valor da menor face obtida.
2. Ao examinar um paciente, podemos considerar como variáveis aleatórias:
 - a) a concentração de hemoglobina no sangue
 - b) a frequência cardíaca; e
 - c) a pressão arterial.

Eventos e Variáveis Aleatórias

Usamos **variáveis aleatórias** para descrever **eventos**.

Quando estudamos uma v.a. X estaremos interessados em saber a probabilidade de eventos $\{X \in A\}$, em que A é um subconjunto do espaço de resultados possíveis para X .

Usaremos frequentemente os seguintes eventos:

- $\{X = x\}$;
- $\{X \leq x\}$;
- $\{X > x\}$; ou
- $\{a < X < b\}$.

Exemplo

Experimento: lançar um dado e observar o valor da face de cima.

- X : valor observado;
- $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; e
- X é dita uma **variável aleatória**.

Função de probabilidades de X :

x	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Observação: A seguinte notação $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ representa a função de probabilidades de X .

Exemplo

Considere o experimento dado por 3 lançamentos de uma moeda honesta, usando *Coroa* $\leftrightarrow 0$ e *Cara* $\leftrightarrow 1$. Seja X o número de caras obtidas. Assim:

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{|\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}|}{|\{0, 1\}^3|} = \frac{3}{8}$$

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \frac{|\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}|}{|\{0, 1\}^3|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(X > 2) = \frac{|\{(1, 1, 1)\}|}{|\{0, 1\}^3|} = \frac{1}{8}.$$

Tipologia das Variáveis Aleatórias

Nesse curso estudaremos dois tipos de variáveis aleatórias, a saber: discretas ou contínuas.

Variáveis aleatórias categóricas são aquelas cujos os valores possíveis são descritos por um “alfabeto finito” que representa as categorias em questão. Em geral, representaremos-as usando o alfabeto numérico, de forma que podem ser tratadas como variáveis aleatórias discretas (abaixo).

Variáveis aleatórias discretas são aquelas cujos os valores numéricos (reais) possíveis $\{x_1, x_2, \dots\}$ podem ser listados.

Variáveis aleatórias contínuas são aquelas cujos os valores possíveis formam um subconjunto contínuo de $\mathbb{R}$.

Variável Aleatória Discreta

A *função de probabilidade* de uma v.a. X discreta é a função p_X dada por

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x).$$

Note que a função de probabilidade (f.p.) p_X da v.a. X satisfaz

$$\begin{cases} p_X(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in \Omega_X \\ \sum_{x \in \Omega_X} p_X(x) = 1 \\ \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} p_X(x) \text{ para todo } A \subseteq \Omega_X \end{cases}$$

Exemplo

Experimento: lançar um dado e observar o valor da face de cima.

- X : valor observado;
- $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; e
- X é dita uma **variável aleatória**.

Função de probabilidades de X :

x	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Observação: A seguinte notação $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ representa a função de probabilidades de X .

Exemplo

Considere o experimento dado por 3 lançamentos de uma moeda honesta, usando *Coroa* $\leftrightarrow 0$ e *Cara* $\leftrightarrow 1$, de forma que $\Omega = \{0, 1\}^3$. Seja X o número de caras obtidas. Assim, $\Omega_X = \{0, 1, 2, 3\}$ e

$$p_X(x) = \begin{cases} p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = 1/8, \\ p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = 3/8, \\ p_X(2) = \mathbb{P}(X = 2) = 3/8, \\ p_X(3) = \mathbb{P}(X = 3) = 1/8. \end{cases}$$

Para calcular a probabilidade de $X \leq 1$, (i.e. $X \in \{0, 1\}$) usamos que

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = p_X(0) + p_X(1) = \frac{1}{2}.$$

Modelos de Variáveis Aleatórias Discretas

Atribuir um modelo probabilístico (ou estatístico) a uma variável aleatória discreta é especificar os valores da sua função massa de probabilidade. Em muitas situações, apesar de olharmos para experimentos distintos, estaremos usando o mesmo tipo de modelo. Por isso, daremos nomes especiais para tais modelos de forma a identificá-los com mais clareza. A seguir veremos os seguintes modelos:

- Modelo Bernoulli;
- Modelo Binomial;
- Modelo Hipergeométrico; e
- Modelo Poisson.

Variável Aleatória Bernoulli

Uma v.a. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é *Bernoulli* de parâmetro $p \in [0, 1]$, se:

1. X assume valores 0 ou 1, isto é $\Omega_X = \{0, 1\}$;
2. $p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = p$ e $p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

A função de massa de probabilidade também pode ser escrita da forma:

$$p_X(x) = p^x(1 - p)^{1-x} \text{ para } x \in \{0, 1\}.$$

Notação: $X \sim \text{Ber}(p)$.

Variável Aleatória Bernoulli

Observações:

- Essa variável categórica dicotômica (0 ou 1) aparece quando queremos identificar a ocorrência de alguma característica da amostra observada;
- Codificação: $0 \leftrightarrow$ “fracasso” (característica ausente) e $1 \leftrightarrow$ “sucesso” (característica presente).
- *Ensaio de Bernoulli*: experimento aleatório que resulta em “sucesso” ou “fracasso”.
- Parâmetro p : probabilidade de sucesso.

Exemplo: Distribuição Ber($1/2$)

Experimento: Jogar uma moeda e ver se resultou em cara (sucesso).

- X : 1 (sucesso=cara); 0 (fracasso=coroa).
- $X \in \{0, 1\}$.
- O conjunto $\{0, 1\}$ é dito *suporte* da variável aleatória X .

Função de probabilidades de X :

x	0	1
$p_X(x)$	1/2	1/2

$$X \in \{0, 1\} \quad \text{e} \quad p = p_X(1) = \mathbb{P}(\text{sucesso}) = 1/2.$$

Logo, $X \sim \text{Ber}(1/2)$.

Exemplo: Distribuição Ber(1/3)

Experimento: Jogar um dado e ver se o valor da face foi menor que 3.

- $X \in \{0, 1\}$.
- $X = 1$ (sucesso) se o n° for 1 ou 2.
- $X = 0$ (fracasso) se o n° for 3, 4, 5 ou 6.

Função de probabilidades de X :

x	0	1
$p_X(x)$	$4/6=2/3$	$2/6=1/3$

$$X \in \{0, 1\} \quad \text{e} \quad p = p_X(1) = \mathbb{P}(\text{sucesso}) = 1/3.$$

Logo, $X \sim \text{Ber}(1/3)$.

Distribuição Binomial

Quando contamos o número de sucessos em que repetimos de forma independente n ensaios de Bernoulli de parâmetro p , obtemos o que chamamos de distribuição binomial de parâmetros n e p .

Notação: $X \sim \text{Bin}(n; p)$.

Exemplo

Retira-se 3 cartas com reposição. Seja X o número de vezes que sai alguma carta de copas. Então, $X \sim \text{Bin}(3; 1/4)$.

Suporte: $X \in \{0, 1, 2, 3\}$.

S: Sucesso (naipe de copas) $\Rightarrow \mathbb{P}(S) = 1/4$;

F: Fracasso (outro naipe) $\Rightarrow \mathbb{P}(F) = 3/4$.

$$\mathbb{P}(X = 2) = 3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1$$

- 3 : Número de formas de ter 2 sucessos em 3 tentativas
- 2 : Número de sucessos nas 3 tentativas
- 1 : Número de fracassos nas 3 tentativas

Distribuição Binomial (continuação)

Temos que

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(FFF) = \mathbb{P}(F)\mathbb{P}(F)\mathbb{P}(F) = 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^0.$$

De modo geral,

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{3}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{3-x}.$$

- nº de parcelas com x sucessos dentre 3 tentativas;
- x sucessos ocorrem com probabilidade $\frac{1}{4}$ cada; e
- $3 - x$ sucessos ocorrem com probabilidade $\frac{3}{4}$ cada.

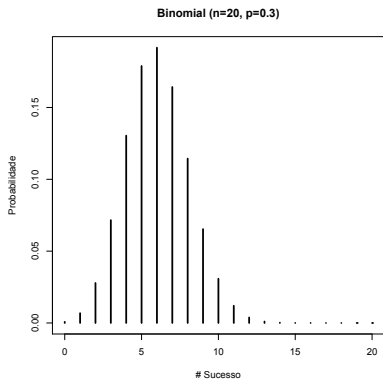
Distribuição Binomial (continuação)

Caso geral: $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

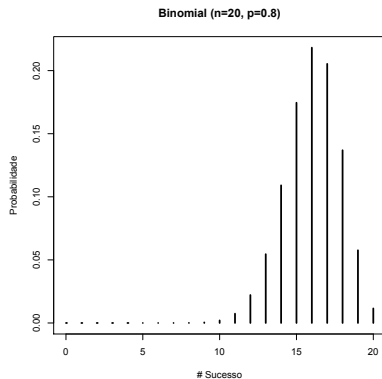
$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad \forall x \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

- X representa o nº de sucessos (no máximo n);
- Cada tentativa de sucesso é independente das outras; e
- Sucessos acontecem com probabilidade p cada um.

Gráfico da Função de Probabilidade da Binomial

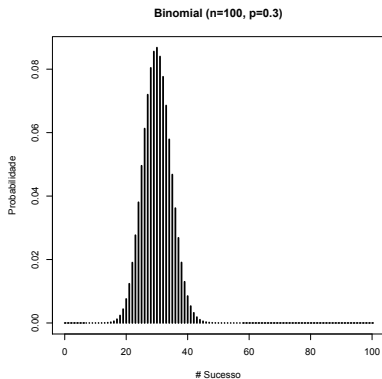


(a) Bin(20; 0,3)

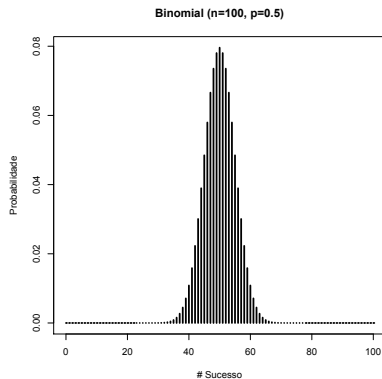


(b) Bin(20; 0,8)

Gráfico da Função de Probabilidade da Binomial



(c) $\text{Bin}(100; 0,3)$



(d) $\text{Bin}(100; 0,5)$

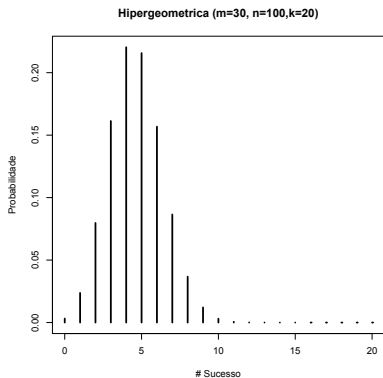
Variável Aleatória Hipergeométrica

Uma v.a. X é **Hipergeométrica** de parâmetros m , n e k , se X assume valores $0, 1, \dots, k$ e para cada $x \in \{0, 1, \dots, k\}$:

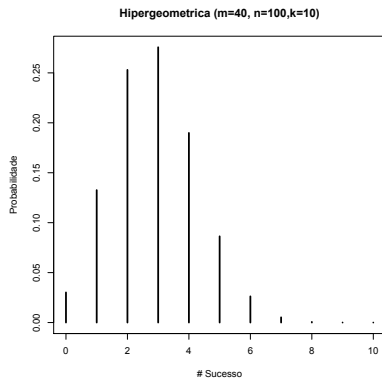
$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \frac{\binom{m}{x} \binom{n}{k-x}}{\binom{m+n}{k}}.$$

Notação: $X \sim \text{Hip}(m, n, k)$.

Gráfico da Função de Probabilidade da Hipergeométrica

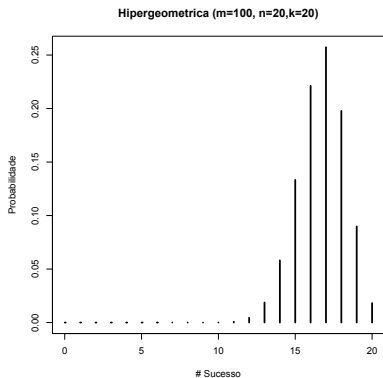


(e) Hip(30; 100; 20)

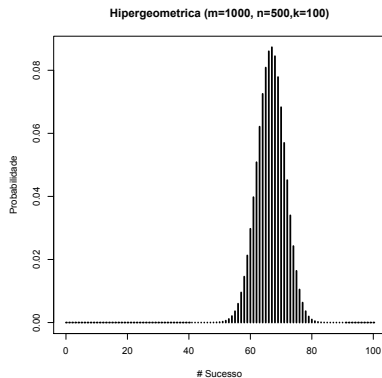


(f) Hip(40; 100; 10)

Gráfico da Função de Probabilidade da Hipergeométrica



(g) Hip(100; 20; 20)



(h) Hip(1.000; 500; 100)

Variável Aleatória Hipergeométrica

Observações:

- O modelo hipergeométrico $X \sim \text{Hip}(m, n, k)$ é usado para modelar o número de sucessos no sorteio sem reposição (ensaios dependentes) de k elementos de uma população com m sucessos e n fracassos.
- A justificativa segue do seguinte: o espaço amostral para esse experimento tem $\binom{m+n}{k}$ elementos, e temos $\binom{m}{x} \binom{n}{k-x}$ formas de escolher exatamente x sucessos dentre os m possíveis, e $k - x$ fracassos dentre os n possíveis.

Exemplo

Suponha que em um lote de 19 peças existam $m = 10$ em bom estado e $n = 9$ defeituosas. Escolhemos $n = 7$ peças ao acaso e sem reposição e seja X o número de peças em bom estado (sucesso) observado. Então, $X \sim \text{Hip}(10, 9, 7)$.

Variável aleatória Poisson

Uma v.a. X é **Poisson** de parâmetro $\lambda > 0$, se X assume valores em $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, e para cada $x \in \mathbb{N}$:

$$p_X(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

Notação: $X \sim \text{Poi}(\lambda)$.

Observação: A Poisson modela o número de eventos *raros*, todos de mesma probabilidade, ocorridos após um número *muito grande* de tentativas (independentes).

Exemplo

O número de pessoas que comparecem a um certo evento tem distribuição Poisson com média de 5 pessoas por dia.

- Qual é a probabilidade de chegarem no máximo 2 pessoas em 1 dia?
- Qual é a probabilidade de chegarem no máximo 2 pessoas em 2 dias?

Atenção: A taxa da Poisson depende da unidade de medida utilizada!

Exemplo

Variáveis que podem ser consideradas com distribuição Poisson:

- Número de erros de digitação em um livro.
- Número de pessoas em uma cidade que têm mais de 100 anos.
- Número de telefonemas recebidos em um dia.
- Número de clientes que chega em um banco em um intervalo fixo de 1h.

Observação: Em alguns desses casos, temos verdadeiramente uma v.a. $\text{Bin}(n, p)$ com n grande e p pequeno, porém iremos aproximá-la por uma Poisson de taxa $\lambda = np$.

Aproximação da Binomial pela Poisson

Se $X \sim \text{Bin}(n, p)$ em que n é grande e $p \approx 0$ de modo que $np = \lambda$ seja aproximadamente fixo, então X tem a distribuição aproximadamente de uma $\text{Poi}(\lambda = np)$, i.e.,

$$p_X(x) \approx \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{N}.$$

Exemplo: Aproximação Binomial Poisson

$X_i \sim \text{Poisson}(2)$

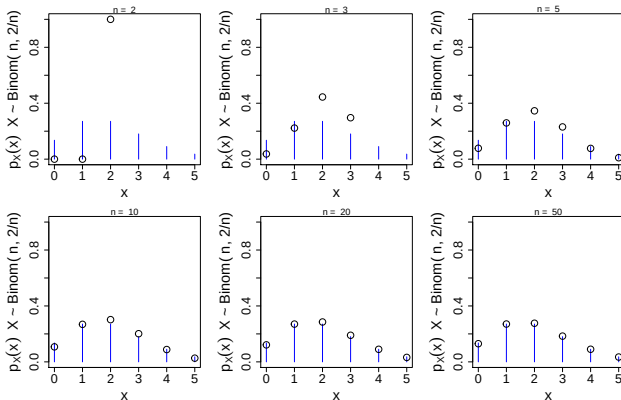


Figura 5: Funções de probabilidade da Poisson(2) e $\text{Bin}(n, 2/n)$.

Função de Distribuição Acumulada (Caso Discreto)

A função de distribuição acumulada (f.d.a.) de uma variável aleatória X é designada por $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ e, para um valor específico $x \in \mathbb{R}$, é definida por

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Exemplo

Considere a variável aleatória X que representa o número de episódios de otite média nos primeiros dois anos de vida de uma criança. Suponha que essa variável aleatória possua uma função massa de probabilidade tal como consta na tabela abaixo.

r	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = r)$	0,129	0,264	0,271	0,185	0,095	0,039	0,017

Exemplo (continuação)

Temos que

$$F_X(-1) = \mathbb{P}(X \leq -1) = 0$$

$$F_X(0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}(X = 0) = 0,129$$

$$\begin{aligned} F_X(1) &= \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) \\ &= 0,129 + 0,264 = 0,393 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_X(2) &= \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) \\ &= 0,129 + 0,264 + 0,271 = 0,664 \end{aligned}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$F_X(6) = \mathbb{P}(X \leq 6) = 1$$

Exemplo (continuação)

$$\left\{ \begin{array}{ll} F(x) = 0; & \text{se } x < 0 \\ F(x) = 0,129; & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ F(x) = 0,393; & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ F(x) = 0,664; & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ F(x) = 0,849; & \text{se } 3 \leq x < 4 \\ F(x) = 0,944; & \text{se } 4 \leq x < 5 \\ F(x) = 0,983; & \text{se } 5 \leq x < 6 \\ F(x) = 1; & \text{se } x \geq 6. \end{array} \right.$$

Exemplo (continuação)

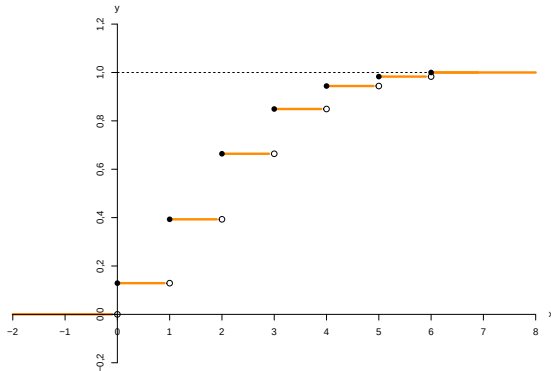


Figura 6: Função de distribuição acumulada para o número de otites.

Exemplo (continuação)

Temos que

- a) $\mathbb{P}(X \leq 4) = F_X(4) = 0,944$;
- b) $\mathbb{P}(X > 4) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 4) = 1 - F_X(4) = 0,056$;
- c) $\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(X \leq 4) - \mathbb{P}(X \leq 3) = 0,944 - 0,849$;
- d) $\mathbb{P}(2 < X \leq 5) = F_X(5) - F_X(2) = 0,983 - 0,664$; e
- e) $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 5) = F_X(5) - F_X(1) = 0,983 - 0,393$.

Valor Esperado - Variáveis Aleatórias Discretas

O **valor esperado** de uma v.a. X discreta é definido por

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \Omega_X} x \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in \Omega_X} x p_X(x).$$

O valor esperado é uma **medida de centralidade**. Esse valor depende somente da **distribuição** da v.a. X , isto é, da f.m.p. p_X .

O valor esperado é uma **média** dos valores $x \in \Omega_X$ que a variável pode assumir, **ponderada** pelas probabilidades de cada valor ($p_X(x)$).

Exemplo: Otorrinolaringologia

Considere a variável aleatória X que representa o número de episódios de otite média nos primeiros dois anos de vida de uma criança. Suponha que essa variável aleatória possua uma função massa de probabilidade tal como consta na tabela abaixo.

r	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = r)$	0,129	0,264	0,271	0,185	0,095	0,039	0,017

Qual é o número esperado de episódios de otite média nos primeiros dois anos de vida?

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0 \times 0,129 + 1 \times 0,264 + 2 \times 0,271 + 3 \times 0,185 \\ &\quad + 4 \times 0,095 + 5 \times 0,039 + 6 \times 0,017 \\ &= 2,038.\end{aligned}$$

Bernoulli e Binomial

Se $X \sim \text{Ber}(p)$, então

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p.$$

Se $X \sim \text{Bin}(n, p)$, então

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{x=1}^n x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= np \sum_{x=1}^n \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{n-x} \\ &= np \sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{(n-1)-y} = np,\end{aligned}$$

em que na quarta igualdade usamos o binômio de Newton.

Linearidade da esperança

Teorema: (Linearidade da esperança) Se X é v.a, então para todos números reais a e b ,

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

Mais geralmente, X e Y são v.a.s, então para todos números reais (constantes) a e b ,

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$$

Para variáveis aleatórias $X_1, \dots, X_n$, e números reais (constantes) $a_1, \dots, a_n$, temos que

$$\mathbb{E}(a_1X_1 + \dots + a_nX_n) = a_1\mathbb{E}(X_1) + \dots + a_n\mathbb{E}(X_n).$$

Exemplo

Considere um aquário com 11 fêmeas de peixes beta, 7 fêmeas de peixes guppy e 8 fêmeas de platti. Estima-se que o número de filhotes gerados por fêmeas de beta, guppy e platti sigam o modelo de Poisson com taxas iguais a 20, 120 e 50 por ninhada, respectivamente. Qual é o valor esperado do total de filhotes no aquário supondo uma ninhada para cada fêmea?

Esperança de Função de Variável Aleatória

Como calcular $\mathbb{E}(g(X))$ quando X é uma v.a. discreta?

Teorema: Se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função qualquer e X é v.a. discreta, então

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in \Omega_X} g(x) \mathbb{P}(X = x).$$

Um caso particular do **Teorema** seria, por exemplo

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x \in \Omega_X} x^2 \mathbb{P}(X = x).$$

Importante: $\mathbb{E}[g(X)] \neq g[\mathbb{E}(X)]$.

Exemplo: Otorrinolaringologia

r	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = r)$	0,129	0,264	0,271	0,185	0,095	0,039	0,017

Qual é o valor esperado **do quadrado** do número de episódios de otite média nos primeiros dois anos de vida?

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x \in \Omega_x} x^2 \mathbb{P}(X = x).$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= 0^2 \times 0,129 + 1^2 \times 0,264 + 2^2 \times 0,271 + 3^2 \times 0,185 \\ &\quad + 4^2 \times 0,095 + 5^2 \times 0,039 + 6^2 \times 0,017 \\ &= 6,12.\end{aligned}$$

Variância

- Seja X uma variável aleatória. A **variância** de X é definida como

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2), \quad \text{com} \quad \text{Var}(X) \geq 0.$$

- $X - \mathbb{E}(X)$ é uma variável aleatória!
- $X - \mathbb{E}(X)$ é a distância (com sinal) entre X e sua média, logo $(X - \mathbb{E}(X))^2$ é o quadrado dessa distância.
- Logo, $\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$ é o valor que se espera para o quadrado da distância entre X e a sua média $\mathbb{E}(X)$.
- A variância de X também pode ser calculada da seguinte forma:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Exemplo: Otorrinolaringologia

No exemplo dos episódios de otite média nos primeiros dois anos de vida de uma criança, obtivemos $\mathbb{E}(X^2) = 6,12$ e $\mathbb{E}(X) = 2,038$.

Então,

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 6,12 - 2,038^2 = 2,046556.$$

Variância - Modelo Bernoulli

Se $X \sim \text{Ber}(p)$, então $\text{Var}(X) = p(1 - p)$.

De fato, sabemos que $\mathbb{E}(X) = p$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum x = 0^1 x^2 \mathbb{P}(X = x) \\ &= 0^2 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1^2 \times \mathbb{P}(X = 1) \\ &= P(X = 1) = p.\end{aligned}$$

Logo,

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

Esperança e Varância - Modelos Discretos

Esperança e variância de algumas distribuições conhecidas:

- a) $X \sim \text{Ber}(p) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = p$ e $\text{Var}(X) = p(1 - p)$;
- b) $X \sim \text{Bin}(n; p) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = np$ e $\text{Var}(X) = np(1 - p)$; e
- c) $X \sim \text{Poi}(\lambda) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \lambda$ e $\text{Var}(X) = \lambda$.

Desvio Padrão

O **desvio padrão** de X é definido por

$$\text{DP}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

O desvio padrão é uma medida de dispersão com a **mesma** unidade que a v.a. X (ao contrário da variância, cuja unidade é o **quadrado** da unidade da v.a. X).

Coeficiente de Variação

O **Coeficiente de Variação** é definido por:

$$CV(X) = \frac{DP(X)}{\mathbb{E}(X)} \quad \text{com} \quad \mathbb{E}(X) \neq 0.$$

Exemplo:

1. X =Pressão arterial, com
 $\mathbb{E}(X) = 12$, $DP(X) = 2 \Rightarrow CV(X) = 1/6$;
2. Y =Preço do lote de 100 ações, com
 $\mathbb{E}(Y) = 1000$, $DP(Y) = 2 \Rightarrow CV(Y) = 1/500$.
3. $DP(X) = DP(Y)$, mas $CV(X) > CV(Y)$.

Propriedades da esperança e da variância

- a) Seja $a \in \mathbb{R}$ constante. Então, $\mathbb{E}(a) = a$ e $\text{Var}(a) = 0$.
- b) Se X é v.a, então $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$.
- c) Se X é v.a, então para quaisquer números reais a e b ,
 $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.
- d) Se X e Y são v.a., então para quaisquer números reais a e b ,
 $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.
- e) Se X é v.a, então para quaisquer números reais a e b ,
 $\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X)$.
- f) Se X e Y são v.a *independentes*, então para quaisquer números reais a e b , $\text{Var}(aX + bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y)$.

Variáveis Aleatórias Contínuas

Dizemos que X é uma v.a. **contínua** se assume valores em um conjunto Ω_X contínuo.

Se X é contínua, existe uma função f_X , denominada **função densidade de probabilidade** satisfazendo:

1) $f_X(x) \geq 0$; e

2) $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx.$

O cálculo da integral fornece a área abaixo da curva f_X entre os pontos a e b .

Variáveis Aleatórias Contínuas

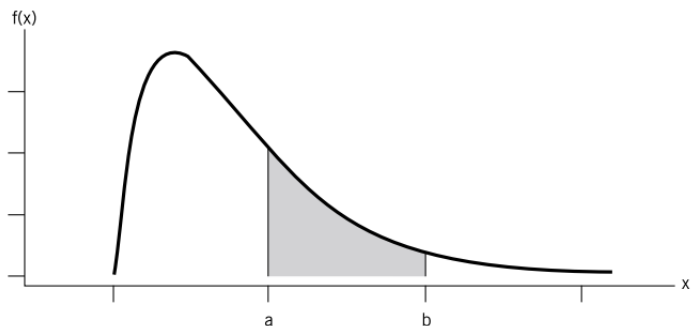


Figura 7: Função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua.

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Se X é v.a. contínua, então $\mathbb{P}(X = x) = 0$ para todo $x \in \Omega_X$.
- Note que $f_X(x)$ **NÃO** é $\mathbb{P}(X = x)$! Esse último valor é sempre zero para v.a. contínuas:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = x) &= \mathbb{P}(x \leq X \leq x) \\ &= \text{Área abaixo de } f_X \text{ entre } x \text{ e } x = 0.\end{aligned}$$

- Portanto, se $a < b$, é verdade que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= \mathbb{P}(a < X \leq b) \\ &= \mathbb{P}(a \leq X < b) \\ &= \mathbb{P}(a < X < b).\end{aligned}$$

Variável Aleatória Uniforme

Uma v.a. contínua é dita **uniforme** no intervalo $[a, b]$ se a sua densidade é dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notação: $X \sim \text{Unif}([a; b])$.

Variável Aleatória Uniforme

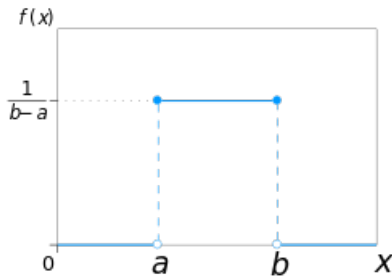


Figura 8: Densidade Uniforme no intervalo $[a; b]$.

Exemplo

Às 8hs da manhã, um zoólogo coloca alimento escondido na jaula de um leão em processo de recuperação para reinserção na natureza. Após retornar à jaula às 10hs, o zoólogo notou que o animal já havia se alimentado. Suponha que qualquer horário no intervalo $[8; 10]$ é igualmente provável.

- a) Qual é a distribuição de probabilidades do instante de tempo X em que o animal encontrou o alimento?
- b) Qual é a probabilidade de que o leão tenha encontrado o alimento nos primeiros 30 minutos após o zoólogo colocar o alimento na jaula?
- c) Qual é a probabilidade de que o leão não tenha se alimentado até as 9:30?

Variável Aleatória Exponencial

Uma v.a. contínua é dita **exponencial** de parâmetro λ ($\lambda > 0$) se a sua densidade é dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notação: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Variável Aleatória Exponencial

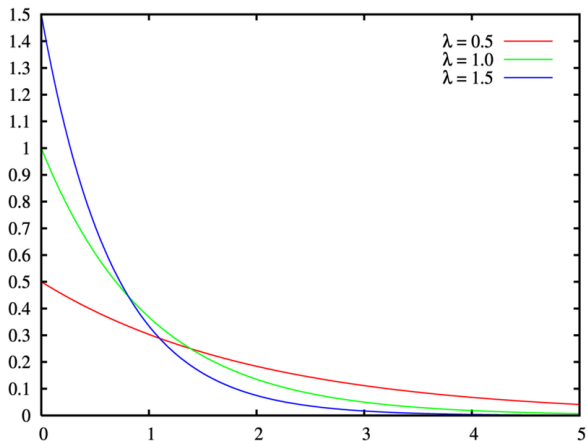


Figura 9: Densidade Exponencial.

Variável Aleatória Exponencial - Aplicações

- Tempo até uma partícula radioativa decair.
- Tempo entre chamadas telefônicas em uma central de auto-atendimento.
- Distância entre mutações em uma fita de DNA.
- Altura de moléculas de gás em um campo gravitacional uniforme a temperatura e pressão fixos.
- Em Meteorologia, precipitação máxima em um determinado intervalo de tempo.
- Tempo de vida útil de aparelhos eletrônicos.

Função de Distribuição Acumulada Exponencial

$X \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, para $x \geq 0$, e sua f.d.a. é conhecida:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}.$$

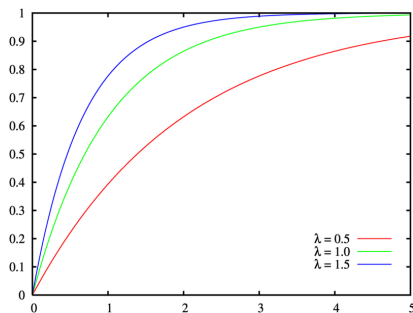


Figura 10: Distribuição Exponencial.

Exemplo

Seja T o tempo (em horas) decorrido entre a chegada de dois ônibus da linha 485 consecutivos em um dia de sábado no ponto em frente ao hospital universitário. Suponha que $T \sim \text{Exp}(2)$.

- a) Se um ônibus 485 acabou de passar, qual a probabilidade de termos de esperar por pelo menos 2 horas no ponto de ônibus até a chegada do próximo 485?
- b) Sabendo que nenhum 485 passou há pelo menos 1 hora, qual a probabilidade de que, ainda assim, precisemos esperar pelo menos mais 2 horas até o próximo ônibus chegar?

Exemplo (continuação)

Solução:

a) Sendo $F_T(t) = 1 - e^{-2t}$, para $t \geq 0$, temos que:

$$\mathbb{P}(T > 2) = 1 - F_T(2) = e^{-4}.$$

$$\text{b) } \mathbb{P}(T > 3 \mid T > 1) = \frac{\mathbb{P}(T > 3)}{\mathbb{P}(T > 1)} = \frac{1 - F_T(3)}{1 - F_T(1)} = \frac{e^{-2 \times 3}}{e^{-2 \times 1}} = e^{-4}.$$

Variável Aleatória Exponencial - Perda de Memória

Teorema: Uma variável aleatória contínua X satisfaz a propriedade da **perda de memória**, i.e.,

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s), \forall s, t > 0,$$

se e somente se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Conclusão: A distribuição exponencial não é muito indicada na prática para modelar tempos de espera.

Função de Distribuição Acumulada (Caso Discreto)

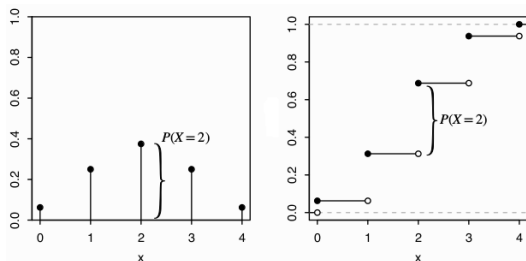
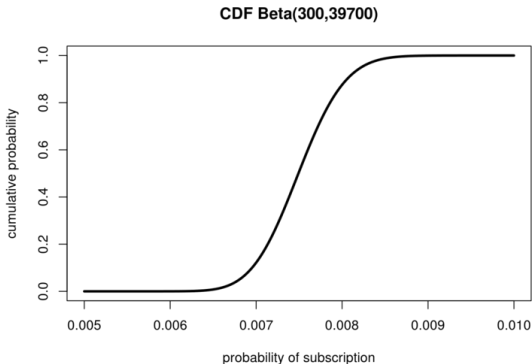


Figura 11: Função massa de probabilidade (esquerda) e função de distribuição acumulada de uma variável aleatória $X \sim \text{Bin}(4; 1/2)$ (direita).

Note que $\mathbb{P}(X = x) = \lim_{y \rightarrow x^-} F_X(y) - F_X(x)$, ou seja, a probabilidade do valor x ser assumido é o tamanho do salto da f.d.a. no ponto x .

Função de Distribuição Acumulada (Caso Contínuo)



Função de Distribuição Acumulada (Caso Contínuo)

Teorema: A f.d.a. de uma v.a. X satisfaz às propriedades abaixo:

- F_X é não-decrescente, ou seja, se $x < y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$; e
- Se X é contínua, então F_X também é contínua.

Distribuição Normal-Padrão

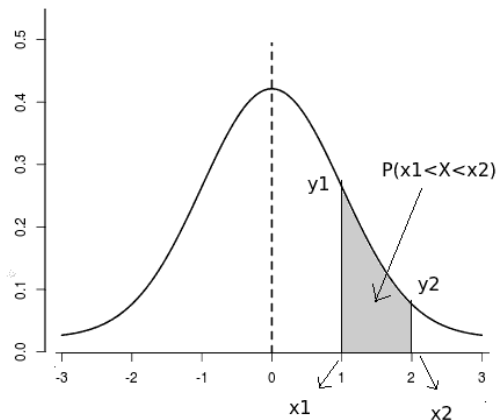
Notação: $X \sim N(0; 1)$.

Lê-se:

- X tem distribuição normal-padrão; ou
- X tem distribuição normal com média 0 e variância 1.

$X \sim N(0, 1) \Rightarrow X$ pode assumir “qualquer” valor, ou seja,
 $X \in \mathbb{R}$.

Densidade da Normal-Padrão



Densidade da Normal-Padrão

- Simétrica em torno de 0.
- $\mathbb{P}(X < 0) = 0,5$.
- As alturas medem a plausibilidade relativa (se $y_1 = 3y_2$, então valores próximos a x_1 são 3 vezes mais plausíveis de serem observado que valores próximos a x_2).
- Valores próximos de 0 são mais plausíveis.

Calculando Probabilidades na Normal-Padrão

$$p = P(X < z_p)$$



Calculando Probabilidades na Normal-Padrão

- p está no interior da tabela.
- z_p está nas bordas da tabela.
- Por exemplo, $P(X < 0,21) = 0,5832$

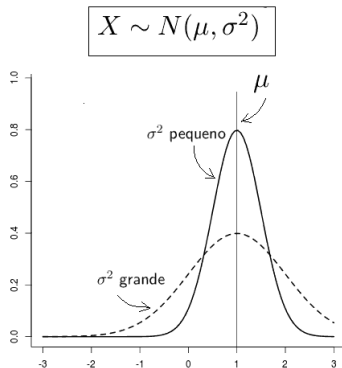
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224

Exercícios: Normal Padrão

Sendo $Z \sim N(0; 1)$, calcule:

- a) $\mathbb{P}(Z \leq 0,83)$
- b) $\mathbb{P}(Z \geq 0,83)$
- c) $\mathbb{P}(Z \leq -1,5)$
- d) $\mathbb{P}(Z > 1,5)$
- e) $\mathbb{P}(0,83 < Z < 1,5)$
- f) $\mathbb{P}(-0,3 < Z \leq 2)$

Normal com média μ e variância σ^2



- X é simétrica em torno de μ , $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$.
- Quanto maior σ^2 (variância), maior a dispersão dos valores sorteados de X .

Duas Propriedades Interessantes

Padronização:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Interpretação do valor numérico dos desvios (σ):

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,95$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,99$$

Exemplo

X : comprimento (mm) da pinça de um escorpião adulto da espécie *Scorpio maurus*.

$$X \sim N(49; 6)$$

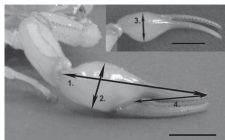
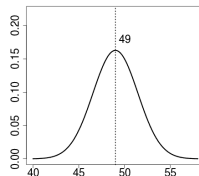


Figure 2 Length (1) and height (2) as measured on the chela. Width (3) of chela is shown in dorsal view in inset. Distance of fixed fingertip to joint of movable finger (4). Scale bars are 5mm.



- a) A chance de encontrar um indivíduo com comprimento da pinça medindo entre 44,10mm e 53,89mm nessa população é de aproximadamente 95%.
- b) A chance de encontrar um indivíduo com comprimento da pinça medindo entre 41,65mm e 56,34mm nessa população é de aproximadamente 99%.

Média e Variância - Variável Aleatória Contínua

Assim, a esperança de X é dada por

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx,$$

e a variância de X por

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E} \left[(X - \mathbb{E}[X])^2 \right] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

em que

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx.$$

Mas como trabalharemos com distribuições conhecidas, não precisaremos usar as integrais!

Média como Centro de Massa

Podemos fazer uma analogia entre a média de uma v.a. e o **centro de massa** de um corpo cuja densidade de massa é a f.p. ou f.d.p. da v.a. em questão:

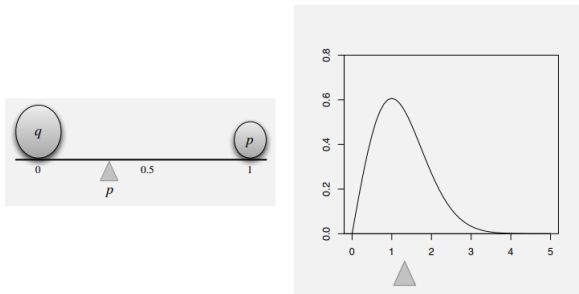


Figura 12: Média como centro de massa, casos discreto e contínuo, respectivamente.

Média de Variáveis Simétricas

Média de variáveis simétricas: Se X é uma variável aleatória simétrica ao redor de μ e seu valor esperado é finito, então $E(X) = \mu$.

Exemplo: $X \sim N(49; 6) \Rightarrow E(X) = 49$.

Observações:

- Nem toda variável aleatória tem esperança (finita), por exemplo a t -Student com 1 grau de liberdade.

Média e Variância da Uniforme

Seja $X \sim \text{Unif}([a, b])$. Como X é simétrica, segue que

$$E(X) = \frac{a + b}{2}.$$

A variância de X é dada por

$$\text{Var}[X] = \frac{(b - a)^2}{12}.$$

Média e Variância da Exponencial

Seja $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Então,

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Média e Variância da Normal

Seja $Z \sim N(0; 1)$. Note que a densidade é simétrica em torno do zero. Então,

$$\mathbb{E}[Z] = 0.$$

Também podemos verificar que

$$\text{Var}[Z] = 1.$$

Média e Variância da Normal

Se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, sabemos que

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0; 1),$$

e portanto (pela linearidade)

$$0 = \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma} (\mathbb{E}[X] - \mu),$$

o que implica que $\mathbb{E}[X] = \mu$. Para variância, temos que

$$1 = \text{Var}[Z] = \text{Var}\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = \frac{\text{Var}[X]}{\sigma^2},$$

e assim temos que $\text{Var}[X] = \sigma^2$.

Quantis de Probabilidade Acumulada

- Seja X v.a. com suporte Ω_X . O **quantil** de probabilidade $p \in [0, 1]$, definido por q_p é o valor numérico em Ω_X que satisfaz $\mathbb{P}(X \leq q_p) = p$.
- **Exemplo 1:** Considere o comprimento das pinças de um escorpião adulto da espécie *Scorpio maurus* tendo distribuição $N(49; 6)$. Qual é o comprimento da pinça que separa os 2% maiores comprimentos na população?
- **Exemplo 2:** Considere o comprimento das pinças de um escorpião adulto da espécie *Scorpio maurus* tendo distribuição $Unif(47; 51)$. Qual é o comprimento da pinça que separa os 2% maiores comprimentos na população?

Vetores Aleatórios Bidimensionais

Em diversas ocasiões é interessante estudar a relação entre múltiplas variáveis aleatórias de um mesmo experimento. Por exemplo

- *Medicina:* Para avaliar a efetividade de um tratamento, pode-se tomar várias medidas por paciente; a pressão arterial, a frequência cardíaca e as taxas de colesterol podem ser mais informativas do que qualquer uma dessas medidas separadamente.
- *Genética:* Para estudar a relação entre vários marcadores genéticos e uma particular doença, se olhamos separadamente para as distribuições de cada marcador genético, poderíamos falhar na tarefa de aprender se uma interação entre os marcadores está relacionado a doença.

Distribuição Conjunta

Como motivação, investigaremos a ausência ou presença de anomalia cromossômica em função da idade da gestante. Para isso, considera-se duas faixas de idade para as gestantes. Estima-se que as probabilidades conjuntas se expressem como na tabela abaixo:

Idade / Anomalia	Presente	Ausente	Total
[35, 40)	0,03	0,45	0,48
[40, +∞)	0,01	0,51	0,52
Total	0,04	0,96	1

- $\mathbb{P}(\text{Idade} = [35, 40) \cap [\text{Anomalia} = \text{Presente}]) = 0,03.$
- $\mathbb{P}(\text{Idade} = [35, 40)) = 0,48.$
- $\mathbb{P}([\text{Anomalia} = \text{Presente}]) = 0,04.$

Distribuições Marginais

- a) As distribuições marginais estão à margem da tabela.
- b) Distribuições marginais são obtidas se somando a distribuição conjunta por coluna ou por linha.

Idade / Anomalia	Presente	Ausente	Total
[35, 40)	0,03	0,45	0,48
[40, $+\infty$)	0,01	0,51	0,52
Total	0,04	0,96	1

- $\mathbb{P}(\textit{Idade} = [35, 40)) = 0,48.$
- $\mathbb{P}(\textit{Idade} = [40, \infty)) = 0,52.$
- $\mathbb{P}(\textit{Anomalia} = \textit{Presente}) = 0,04$
- $\mathbb{P}(\textit{Anomalia} = \textit{Ausente}) = 0,96.$

Variáveis Aleatórias Independentes

Duas v.a. X e Y são **independentes** se

$$\mathbb{P}(X \in A; Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B),$$

para todo $A \subset \Omega_X$ e $B \subset \Omega_Y$.

Em outras palavras, duas v.a. X e Y são independentes se qualquer evento envolvendo a v.a. X for independente de qualquer evento envolvendo apenas Y .

Variáveis Aleatórias Independentes

As v.a. X_1 e X_2 X_3 são **independentes** se

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1; X_2 \in A_2; X_3 \in A_3) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1)\mathbb{P}(X_2 \in A_2)\mathbb{P}(X_3 \in A_3),$$

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1; X_2 \in A_2) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1)\mathbb{P}(X_2 \in A_2),$$

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1; X_3 \in A_3) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1)\mathbb{P}(X_3 \in A_3), \quad \text{e}$$

$$\mathbb{P}(X_2 \in A_2; X_3 \in A_3) = \mathbb{P}(X_2 \in A_2)\mathbb{P}(X_3 \in A_3),$$

para todo $A_i \in \Omega_{X_i}$, $i = 1, 2, 3$.

De modo geral, $X_1, \dots, X_n$ são independentes se os eventos $[X_1 \in A_1], \dots, [X_n \in A_n]$ são independentes

$\forall A_i \subset \Omega_{X_i}$, $i = 1, \dots, n$.

Independência de Variáveis Aleatórias Discretas

Duas v.a. discretas X e Y são **independentes** se

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y),$$

para todo $x \in \Omega_X$ e $y \in \Omega_Y$.

Em outras palavras, as v.a. aleatórias X e Y são independentes se a f.p. conjunta $p_{X,Y}$ é o produto das marginais p_X e p_Y :

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y),$$

para todo $x \in \Omega_X$ e $y \in \Omega_Y$.

Exemplo

Idade / Anomalia	Presente	Ausente	Total
$[35, 40)$	0,03	0,45	0,48
$[40, +\infty)$	0,01	0,51	0,52
Total	0,04	0,96	1

- $\mathbb{P}(Idade = [35, 40) \cap [Anomalia = Presente]) = 0,03$,
 - $\mathbb{P}(Idade = [35, 40)) = 0,48$, e
 - $\mathbb{P}([Anomalia = Presente]) = 0,04$.
- a) Como $\mathbb{P}(Idade = [35, 40)) \times \mathbb{P}([Anomalia = Presente]) \neq \mathbb{P}(Idade = [35, 40) \cap [Anomalia = Presente])$, então os eventos $Idade = [35, 40)$ e $[Anomalia = Presente]$ são **dependentes**.
- b) Como consequência, as variáveis aleatórias $Idade$ e $Anomalia$ são **dependentes**.

Soma de Variáveis Aleatórias

Dadas n variáveis aleatórias $X_1, \dots, X_n$, podemos definir uma nova variável aleatória como

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Somas de variáveis aleatórias aparecem em muitos contextos:

- ao fazer a média de várias observações do mesmo experimento;
- ao quantificar efeitos cumulativos.

Uma questão importante é determinar a distribuição da variável soma S_n a partir da distribuição de cada X_i ; em geral, isso não é fácil.

Exemplo: $X_1 \sim \text{Bin}(n_1, p_1)$ e $X_2 \sim \text{Bin}(n_2, p_2)$ com $p_1 \neq p_2$,
 $X_1 + X_2 \stackrel{?}{\sim}$

Esperança e Variância de Combinações Lineares

Embora a distribuição de soma de v.a. possa ser complicada de se calcular, a relação entre valor esperado e variância é mais simples.

Dadas n variáveis aleatórias $X_1, \dots, X_n$ e constantes reais $a_1, \dots, a_n$, temos que

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n a_i X_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}(X_i).$$

Se as variáveis aleatórias $X_1, \dots, X_n$ forem independentes, então

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^n a_i X_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i).$$

Exemplo

Uma classe tem 300 estudantes e cada estudante tem probabilidade de $1/3$ de obter a nota máxima A, independentemente dos outros. Seja X o número de estudantes que recebem nota A. Encontre $\mathbb{E}(X)$ e $\text{Var}(X)$.

Podemos representar $X = \sum_{i=1}^{300} X_i$ com $X_i \sim \text{Ber}(1/3)$.

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{300} X_i\right) = \sum_{i=1}^{300} \mathbb{E}(X_i) = \frac{300}{3} = 100$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{300} X_i\right) = \sum_{i=1}^{300} \text{Var}(X_i) \\ &= 300 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{200}{3}.\end{aligned}$$

Distribuição da Soma de Variáveis Aleatórias Independentes

Vimos como calcular esperança e variância de soma de variáveis aleatórias. Em alguns caso é possível conhecer a distribuição toda (que é uma informação bem mais ampla).

Distribuições de soma de variáveis aleatórias independentes:

$$X_i \sim \text{Ber}(p) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$X_i \sim \text{Bin}(m_i; p) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}\left(\sum_{i=1}^n m_i, p\right)$$

$$X_i \sim \text{Poi}(\lambda_i) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Poi}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i; \sigma_i^2) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i; \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right).$$

Exemplo

Seja $X \sim \mathcal{N}(0; 1/2)$ e $Y \sim \mathcal{N}(0; 1/2)$, com X e Y independentes. Calcule $\mathbb{P}(X + Y \leq 0,5)$.

Sabemos que a soma de variáveis normais independentes é uma normal cujos parâmetros são a soma dos parâmetros das variáveis somadas.

Então, $X + Y \sim \mathcal{N}(0; 1)$ e temos

$$\mathbb{P}(X + Y \leq 0,5) = \Phi(0,5) = 0,69.$$

Exemplo

Considere um aquário com 11 fêmeas de peixes beta, 7 fêmeas de peixes guppy e 8 fêmeas de platti. Estima-se que o número de filhotes gerados por fêmeas de beta, guppy e platti sigam o modelo de Poisson com taxas iguais a 20, 120 e 50 por ninhada, respectivamente.

Agora, podemos mostrars que o valor esperado do total de filhotes no aquário supondo uma ninhada para cada fêmea era de 1460.

Supondo que as fêmeas tenham suas ninhadas de forma independente uma da outra, obtenha distribuição de probabilidades e a variância do total de filhotes no aquário em uma ninhada para cada fêmea.