

CONTROLE ESTATÍSTICO DE QUALIDADE

Ralph S. Silva

<http://www.im.ufrj.br/ralph/ceq.html>

Departamento Métodos Estatísticos
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Março-Julho/2018

Sumário

Gráficos de Controle de CUSUM e de EWMA

Gráficos de Controle de CUSUM e de EWMA

O gráfico de controle de **Somas Acumuladas (CUSUM)**, do inglês *Cumulative Sum*) e o gráfico de controle da **Média Móvel Ponderada Exponencialmente (EWMA)**, do inglês *Exponentially Weighted Moving Average*) são indicados para o monitoramento de processos sujeitos a pequenas perturbações.

A decisão sobre o estado do processo é baseada na informação acumulada de diversas amostras.

Gráfico de Controle de CUSUM

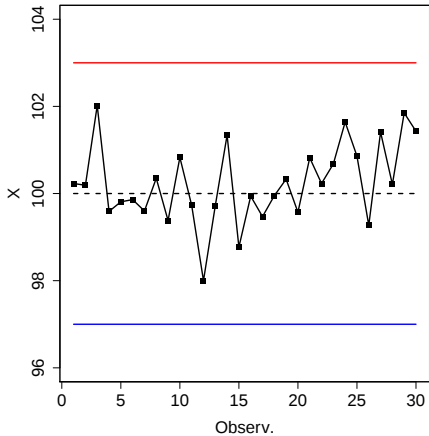
No gráfico de controle de CUSUM, à medida que as amostras são retiradas, os desvios de $\bar{X}$ em relação ao valor-alvo μ_0 (ou ao valor médio em controle) são acumulados, gerando a estatística S_t

$$S_t = \sum_{j=1}^i (\bar{X}_j - \mu_0)$$

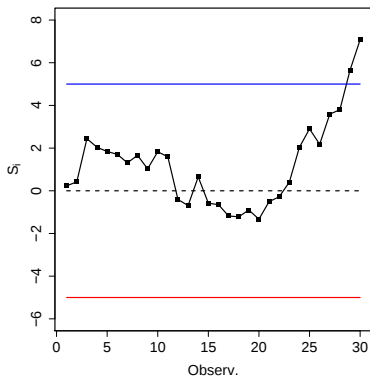
sendo $\bar{X}_j$ a média da j -ésima amostra de tamanho $n \geq 1$.

A Tabela 7.1 apresenta os 20 primeiros valores de uma variável aleatória normal com média 100 e desvio padrão 1 e os 10 seguintes com média 101 e desvio padrão 1.

Mostrar Tabela 7.1



Todos os pontos estão dentro dos limites 3 sigma. O deslocamento da média passou despercebido.



- ▶ No gráfico das somas acumuladas, a estatística S_i cresce indefinidamente.
- ▶ Para grandes desvios da média, o gráfico de controle de $\bar{X}$ é sempre mais ágil.

O Algoritmo CUSUM

Precisamos das seguintes quantidades

$$\begin{aligned}S_i^+ &= \max\{0, X_i - (\mu_0 + d) + S_{i-1}^+\} \\S_i^- &= \max\{0, (\mu_0 - d) - X_i + S_{i-1}^-\},\end{aligned}$$

sendo X_i é a i -ésima observação do processo, e $S_0^+ = S_0^- = 0$.

O algoritmo CUSUM produz um sinal sempre que S_i^+ e S_i^- for maior que K .

Os valores recomendados para K e d são respectivamente, $5\sigma_0$ (desvio padrão) e $|\mu_1 - \mu_0|/2$ (magnitude do deslocamento da média).

A estimativa $\bar{\delta}$ da magnitude do deslocamento sofrido pela média é dada por

$$\bar{\delta} = \begin{cases} d + \frac{S_i^+}{N_i^+}, & \text{se } S_i^+ > K; \\ -d - \frac{S_i^-}{N_i^-}, & \text{se } S_i^- > K. \end{cases}$$

Mostrar Tabela 7.2

Tabela: Gráfico de $\bar{X}$ versus algoritmo CUSUM

Número médio de amostras até o sinal (NMA)					
	Gráfico $\bar{X}$	Algoritmo CUSUM, com $K = k\sigma_0/\sqrt{n}$ e $d = \delta\sigma_0/\sqrt{n}$			
$\frac{ \mu_1 - \mu_0 }{\sigma_0/\sqrt{n}}$	$k = 3,0$	$k = 8,010$ $d = 0,25$	$k = 4,774$ $d = 0,50$	$k = 3,339$ $d = 0,7$	$k = 2,517$ $d = 1,00$
0,0	370	370	370	370	370
0,2	308	116	164	206	239
0,4	200	40,4	54,5	77,8	150
0,6	120	22,2	24,6	33,5	46,8
0,8	71,6	15,1	14,4	17,6	23,6
1,0	43,9	11,4	9,93	10,9	13,6
1,2	27,8	9,18	7,52	7,62	8,79
1,4	18,3	7,69	6,06	5,80	6,28
1,6	12,4	6,63	5,08	4,68	4,81
1,8	8,69	5,84	4,38	3,92	3,89
2,0	6,30	5,22	3,86	3,39	3,26
3,0	2,00	3,48	2,49	2,09	1,86
4,0	1,19	2,67	1,96	1,55	1,32

- ▶ O algoritmo CUSUM pode ser utilizado para $n > 1$. Basta substituir X_i por $\bar{X}_i$ adequadamente nas expressões anteriores.
- ▶ Neste caso, devemos considerar $\sigma_0/\sqrt{n}$ como o desvio.
- ▶ $K = 5\sigma_0/\sqrt{n}$ e

$$S_i^+ = \max\{0, \bar{X}_i - (\mu_0 + d) + S_{i-1}^+\}$$

$$S_i^- = \max\{0, (\mu_0 - d) - \bar{X}_i + S_{i-1}^-\}.$$

- ▶ É vantajoso trabalhar com $n > 1$ para o gráfico de controle de Shewhart e o algoritmo de CUSUM com $n = 1$.

Em alguns casos, é necessário reinicializar o processo após uma intervenção.

O artifício de **Resposta Inicial Rápida (RIR)** consiste em recomençar o monitoramento com S_i^+ e S_i^- :

$$S_0^+ = S_0^- = K/2$$

em vez de $S_0^+ = S_0^- = 0$.

Gráfico de Controle de EWMA

No gráfico de controle de EWMA, utilizamos a estatística Y_i

$$Y_i = \lambda X_i + (1 - \lambda) Y_{i-1}$$

sendo $0 < \lambda \leq 1$ e $Y_0 = \mu_0$ (o valor-alvo ou valor médio em controle de X).

A variância da variável Y_i é dada por

$$\sigma_{Y_i}^2 = \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) [1 - (1 - \lambda)^{2i}]$$

sendo σ^2 a variância da variável X .

Os limites de k -sigma do gráfico de EWMA são dados por

$$LSC = \mu_0 + k\sigma_0 \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}$$

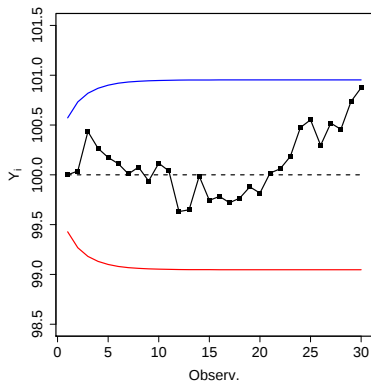
$$LM = \mu_0$$

$$LIC = \mu_0 - k\sigma_0 \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}.$$

Os limites de k -sigma do gráfico de EWMA assintóticos são dados por

$$\begin{aligned}LSC &= \mu_0 + k\sigma_0 \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)} \\LM &= \mu_0 \\LIC &= \mu_0 - k\sigma_0 \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)}.\end{aligned}$$

sendo σ_0 o desvio padrão do processo quando em controle.



- ▶ Para reiniciar, fazemos $Y_0 = \mu_0$.
- ▶ Para $n > 1$, temos $Y_i = \lambda \bar{X}_i + (1 - \lambda)Y_{i-1}$ e o desvio padrão dado por $\sigma_0/\sqrt{n}$.

Número médio de amostras até o sinal (NMA)				
	Gráfico $\bar{X}$	Gráfico de controle de EWMA		
$\frac{ \mu_1 - \mu_0 }{\sigma_0/\sqrt{n}}$	$\lambda = 1,00$ $k = 3,00$	$\lambda = 0,10$ $k = 2,701$	$\lambda = 0,20$ $k = 2,859$	$\lambda = 0,50$ $k = 2,978$
0,0	370	370	370	370
0,2	308	123	162	238
0,4	200	41,2	55,4	106
0,6	120	20,9	25,3	49,6
0,8	71,6	13,4	14,6	26,0
1,0	43,9	9,74	9,80	15,2
1,2	27,8	7,64	7,27	9,88
1,4	18,3	6,30	5,77	6,96
1,6	12,4	5,38	4,78	5,23
1,8	8,69	4,70	4,10	4,15
2,0	6,30	4,18	3,59	3,42
3,0	2,00	2,76	2,31	1,85
4,0	1,19	2,14	1,81	1,30