

CONTROLE ESTATÍSTICO DE QUALIDADE

Ralph dos Santos Silva

<https://www.ralphsilva.org/ceq.html>

Instituto de Matemática
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Referências

- **Costa, A. F. B., Epprecht, E. K. e Carpinetti, L. C. R. (2011). *Controle Estatístico de Qualidade*, 2^a Ed.**
- Louzada, F., Diniz, C. A. R., Silva, P. H. F. e Ferreira, E. L. (2013). *Controle Estatístico de Processos - Uma Abordagem Prática para Cursos de Engenharia e Administração*.
- Montgomery, D. C. (2016). *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*, 7^a Ed.
- Ribeiro, J. L. D. e ten Caten, C. S. (2012). *Controle Estatístico do Processo* ([pdf](#)).

Introdução

- Controle de processos industriais e serviços.
- Industriais: automóveis, geladeiras, roupas, etc.
- Serviços: restaurantes, bancos, lojas, etc.
- Os diversos conceitos de **qualidade**:
 - ◆ adequação ao uso;
 - ◆ atender e, se possível, exceder as expectativas do consumidor;
 - ◆ atender as especificações;
 - ◆ produto que gera menor prejuízo ou perdas para a sociedade; e
 - ◆ atender para o consumidor os quesitos de preço, confiabilidade, durabilidade, estética, pontualidade, sabor conforto, etc.

Tabela 1: Comparação de duas máquinas de cortar grama.

Marca	Preço	Durabilidade	Manutenção	Adequação ao uso
A	Menor	Maior	Menos	
B				Melhor

A escolha de uma das duas máquinas de cortar grama dependerá dos pesos e das notas que o consumidor der para cada quesito.

Introdução

A **qualidade** de um produto é definida no projeto.

Exemplo

Geladeiras têm o objetivo básico de refrigerar os alimentos, porém diferem no tamanho, consumo de energia, nível de ruído, etc.

A **qualidade de conformação** avalia quão bem um produto ou um serviço atende as especificações do projeto.

Objetivo: técnicas estatísticas aplicadas à fase de fabricação para garantir a *qualidade de conformação*.

- O monitoramento dos processos garante a qualidade e agrega valor.
- **Custos de prevenção:** ligadas a ocorrência de não-conformidades.
- **Custos de falhas externas:** venda de produto ou serviços fora das especificações (assistência técnica e perda do cliente).

Fundamentos do controle estatístico de processos

Em uma linha de produção, aparentemente todas as unidades produzidas são exatamente iguais.

No empacotamento de saco de 1.000 mL de leite:

- há variações inerentes ao processo produtivo;
- o saquinho pode estourar se tiver “excesso” de leite; e
- o produtor poderá perder clientes ou ser multado se o saquinho tiver “pouco leite”.

O valor especificado de 1.000 mL é o **valor alvo**.

Exemplo

Ver arquivo exemplo_01.r

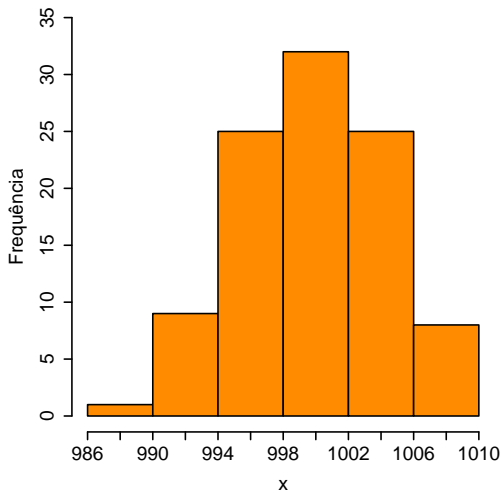
Tabela 2: Amostra de volumes (mL) de 100 caixas de leite.

998,8	994,9	1001,0	1005,1	1004,8	1006,9	991,3	999,1	1004,4	995,7
997,2	993,2	992,6	996,1	996,9	991,5	997,7	998,4	1000,5	998,5
998,7	998,5	1005,4	999,7	999,3	997,9	1007,9	1003,5	1009,5	997,4
1006,6	993,6	1002,2	1003,6	1007,7	999,7	997,9	1002,7	998,5	1003,0
994,2	996,6	993,9	998,5	999,9	1000,1	998,7	1008,8	993,0	997,1
989,7	1005,8	994,9	997,4	1003,0	1001,9	1003,5	1002,4	994,5	995,5
1002,8	1001,3	996,2	999,0	1000,5	1002,2	1000,6	996,4	1007,5	1001,9
1000,3	1003,3	1003,4	997,5	996,3	1004,4	995,2	993,8	1002,8	1002,6
1008,8	1005,8	1005,2	1000,5	1000,0	1001,8	999,9	995,8	992,9	1003,3
1001,8	1002,5	1000,9	995,9	1005,0	998,8	996,6	996,7	998,3	998,2

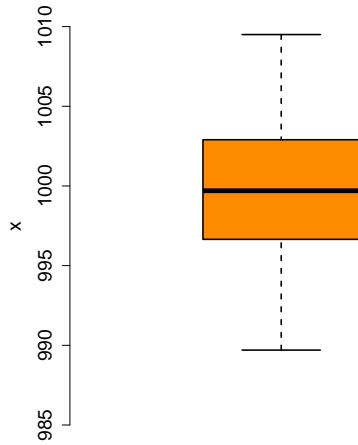
Tabela 3: Estatísticas descritivas.

Média	Desv. Pad	Mediana	Mínimo	Máximo	Amplitude	Assimetria	Exec. Curtose
999,8	4,342	999,7	989,7	1010	19,8	0,0860	-0,5625

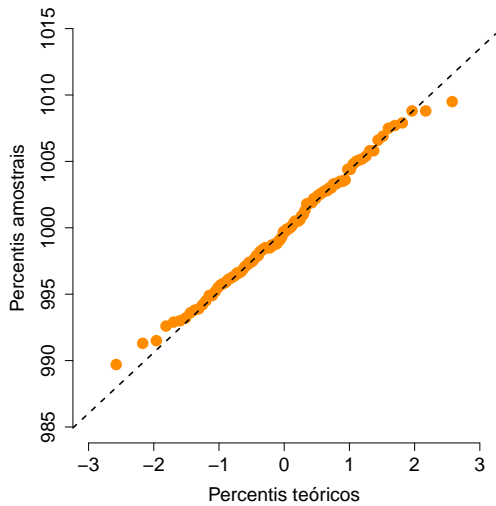
Histograma



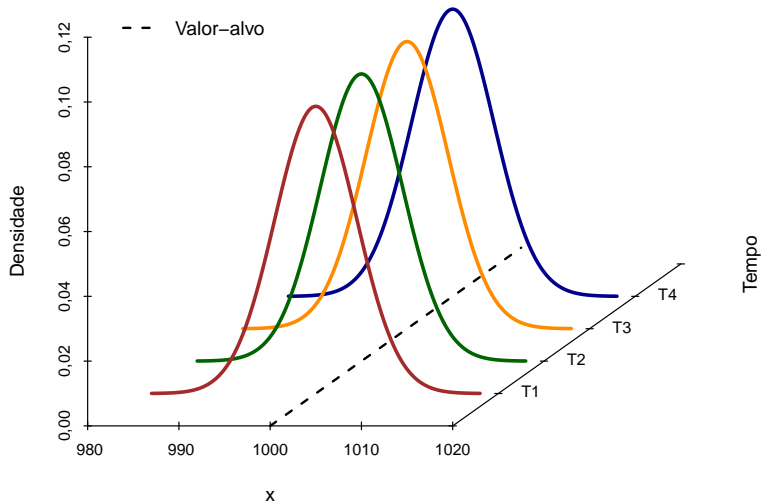
Boxplot



Normal qq-plot

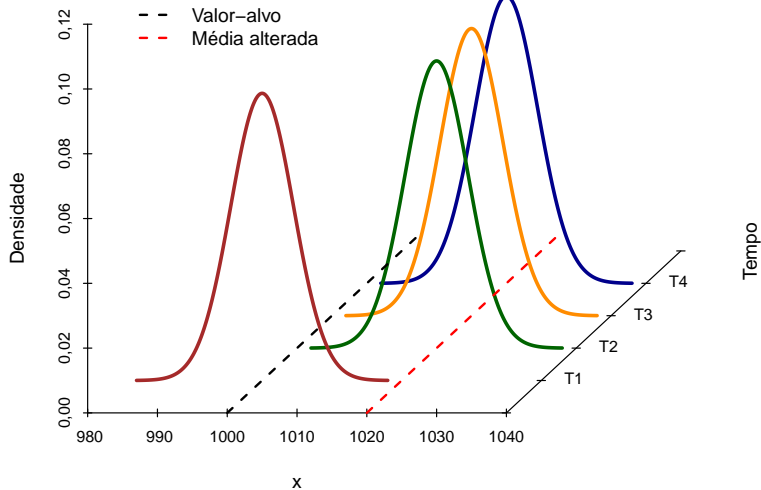


Processo isento de causas especiais



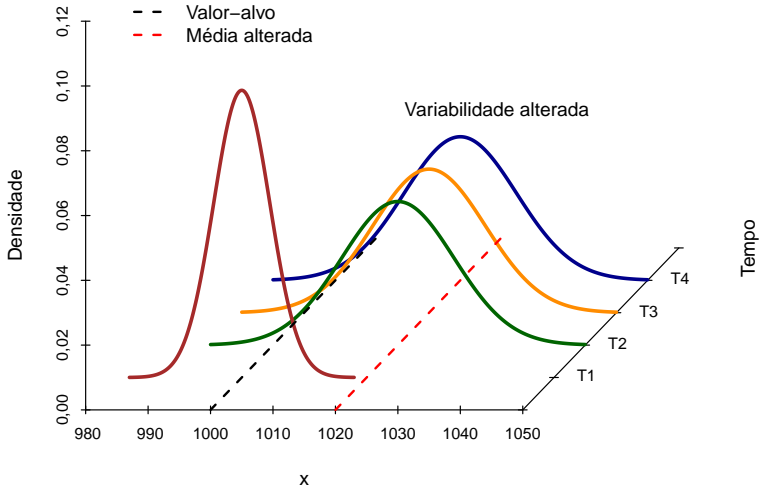
Ver arquivo exemplo_02.r

Causa especial altera a média do processo



Ver arquivo exemplo_02.r

Causa especial altera a média e a variabilidade do processo



Ver arquivo exemplo_02.r

Exemplo

Ver arquivo exemplo_03.r

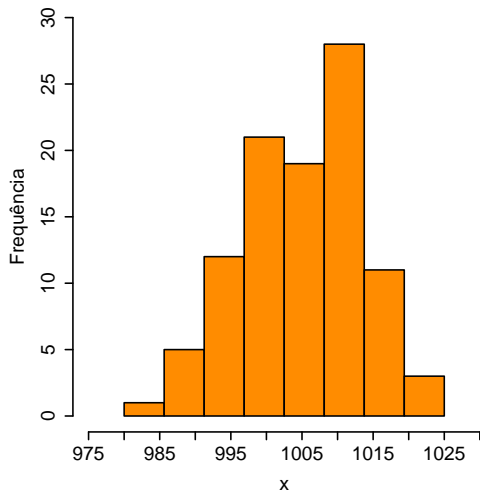
Tabela 4: Amostra de volumes (mL) de 100 caixas de leite com o processo sob influência de causas especiais.

1010,2	1002,3	1003,8	1000,2	1008,8	992,1	1008,9	999,4	1011,3	1014,0
1010,5	995,0	994,0	1011,2	1008,1	1008,3	1017,6	1005,3	1003,8	1019,6
995,0	1010,2	999,9	1009,5	1017,9	1012,9	1008,5	1003,1	1010,5	1009,5
994,1	991,2	1001,6	1002,1	1010,5	1009,0	992,3	1002,3	1012,7	1006,9
994,8	989,1	1002,5	1008,7	1014,6	1004,9	1002,2	1007,3	1002,4	1011,7
980,2	999,4	1002,0	1011,9	997,8	997,5	986,9	1014,4	1024,0	1006,9
992,0	1004,4	1005,3	1003,2	1016,5	1015,3	1003,3	992,6	1013,1	1016,1
997,2	994,5	1006,9	1012,8	1014,5	1021,7	1007,2	996,1	1008,8	1000,2
1004,5	998,7	1002,4	1012,9	1011,1	1007,8	994,2	1012,0	1017,8	1018,4
988,2	991,1	1004,3	1010,6	1009,9	1011,3	998,9	1002,9	997,5	1002,0

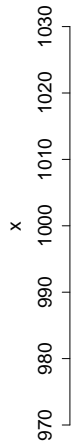
Tabela 5: Estatísticas descritivas.

Média	Desv. Pad	Mediana	Mínimo	Máximo	Amplitude	Assimetria	Exec. Curtose
1005,0	8,478	1005,3	980,2	1024	43,8	-0,3144	-0,2854

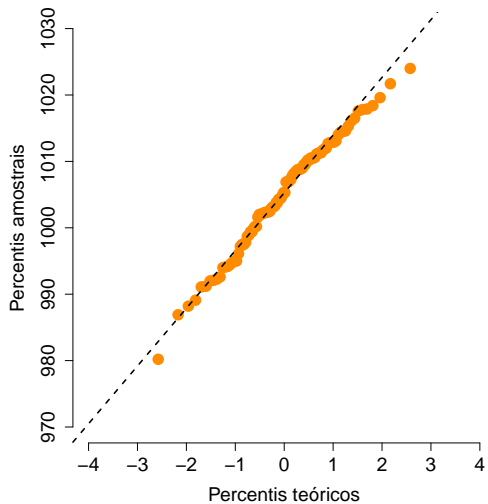
Histograma



Boxplot



Normal qq-plot



Monitoramento dos processos por gráficos de controle

Os **gráficos de controle** servem para monitorar processos.

Tabela 6: Valores de X_{ij} , \bar{X}_i e R_i .

Amostra i	Elemento j da amostra i					\bar{X}_i	R_i
	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}		
1	1001,7	1004,0	1004,8	996,3	1004,3	1002,2	8,5
2	999,7	1000,3	1003,2	993,9	998,9	999,2	9,3
3	990,9	1004,0	1003,0	1004,0	1002,0	1000,8	13,1
4	1000,7	1007,3	998,1	995,5	994,9	999,3	12,4
5	1000,7	998,3	998,9	997,8	1001,9	999,5	4,1
6	998,6	993,7	1002,8	995,5	994,1	996,9	9,1
7	1002,7	1010,5	990,5	992,5	1003,0	999,8	20,0
8	1000,4	1004,0	1003,0	999,8	997,2	1000,9	6,8
9	999,9	1005,6	996,1	1005,5	998,1	1001,0	9,5
10	994,3	993,2	1005,8	996,4	996,7	997,3	12,6
11	997,4	997,1	998,0	995,6	1005,8	998,8	10,2
12	1003,5	992,3	1000,8	1000,0	1001,2	999,6	11,2
13	1003,4	1004,6	1001,3	997,3	1005,8	1002,5	8,5
14	997,7	1004,6	997,0	1001,0	1003,9	1000,8	7,6
15	1012,0	1007,0	1002,7	1008,0	1005,0	1006,9	9,3

Ver arquivo exemplo_04.r

Gráfico de controle de \bar{X}

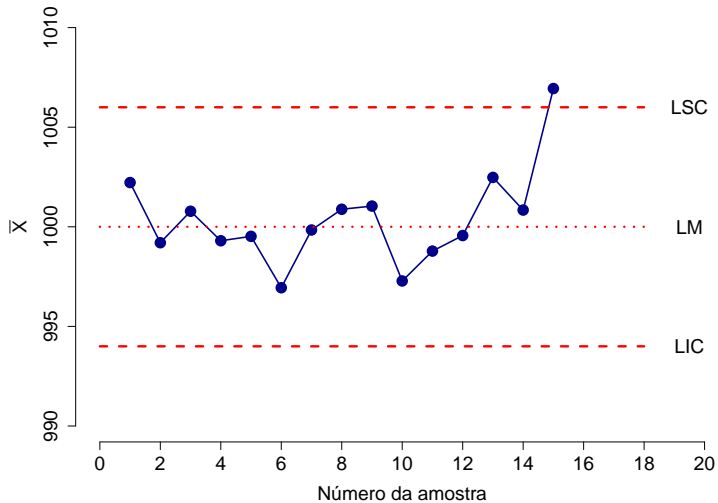
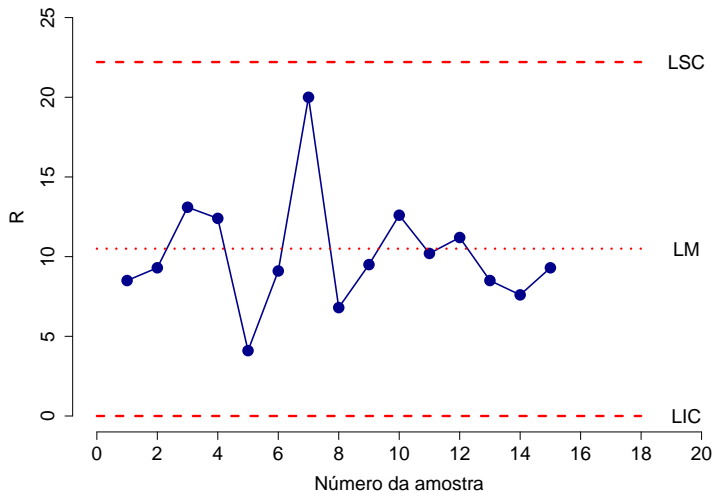


Gráfico de controle de R



Condições para construção e uso dos gráficos de controle

Os limites dos gráficos de controle são determinados com base na média e no desvio padrão da distribuição da variável X quando o processo está isento de causas especiais.

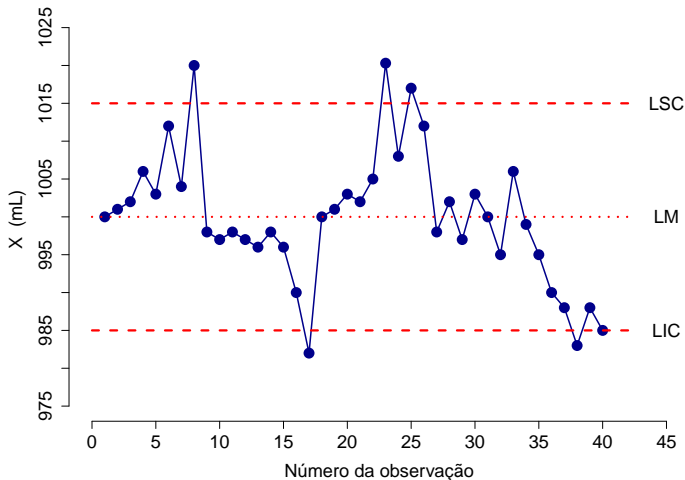
A média deve sempre coincidir com o valor alvo especificado.

É possível fazer a construção de gráficos de controle sem a hipótese de normalidade.

É necessário que os valores observados da variável monitorada sejam independentes.

Gráfico de controle de X sob causas especiais

Considere o estudo de um processo de produção de sacos de leite de 1.000 mL, medindo o volume de um saco a cada 15 minutos de produção.



Ver arquivo exemplo_05.r

Diagrama de causa e efeito

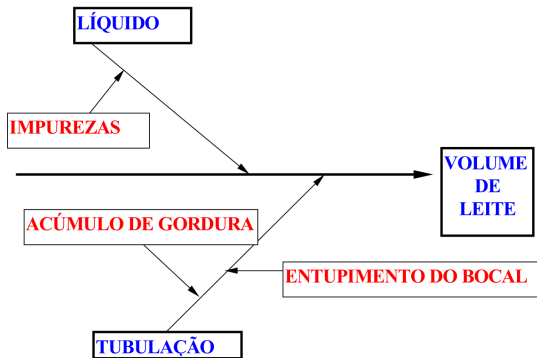
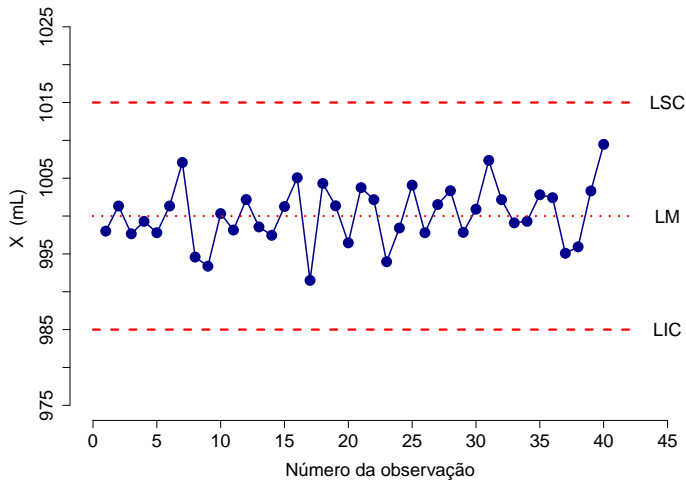


Tabela 7: Causas especiais e medidas corretivas ou preventivas.

Causa especial	Medida corretiva ou preventiva
Gordura na tubulação	Limpeza mensal da tubulação
Entupimento do bocal	Troca semanal do bocal
Impurezas do leite	Utilização de filtros

Gráfico de controle de X após eliminação das causas especiais



Ver arquivo exemplo_06.r

Estimando a variabilidade do processo

Existem várias maneiras de estimar σ (desvio padrão do processo).

Sejam n o tamanho dos subgrupos e m o número de subgrupos.

Defina X_{ij} como o j -ésimo elemento do i -ésimo subgrupo, $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$.

Agora, temos que \bar{X}_i é a média do i -ésimo subgrupo.

Ademais, $\bar{\bar{X}}$ é a média das médias dos subgrupos.

Seja S_i o desvio padrão amostral da m -ésima amostra dada por

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}.$$

Exemplo

Tabela 8: Valores de $X_{ij} \sim \mathcal{N}(1000; 4)$, \bar{X}_i e R_i .

Amostra i	Elemento j da amostra i					\bar{X}_i	R_i	S_i
	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}			
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	1001,3	995,3	999,0	999,1	996,5	998,2	6,0	2,4
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6

Ver arquivo [exemplo_07.r](#)

Estimando a variabilidade do processo (**estimador** S_A)

O **estimador** S_A é dado por

$$S_A = \frac{1}{c_4} \sqrt{\frac{1}{mn-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{X})^2},$$

tal que c_4 é a constante considerando o tamanho de amostra nm .

A **estimativa de** σ via S_A é dada por

$$s_A = \frac{1}{c_4} \sqrt{\frac{1}{40-1} \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^5 (x_{ij} - \bar{X})^2} = \frac{4,06570317505992}{0,9936109} \approx 4,0918,$$

com $\bar{X} = 999,8075$.

Ver arquivo [exemplo_07.r](#)

Estimando a variabilidade do processo (**estimador S_B**)

O **estimador S_B** baseado no desvio padrão das médias dos subgrupos é dado por

$$S_B = \left[\frac{1}{c_4} \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2} \right] \sqrt{n},$$

tal que c_4 é a constante considerando o tamanho de amostra m .

A **estimativa de σ** via S_B é dada por

$$s_B = \frac{1}{c_4} \left[\sqrt{\frac{1}{8-1} \sum_{i=1}^8 (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2} \right] \sqrt{5} = \frac{1,827909}{0,965031} \times 2,236068 \approx 4,1136.$$

Ver arquivo exemplo_07.r

Estimando a variabilidade do processo (**estimador** S_C)

O **estimador** S_C baseado nos desvios padrões amostrais S_i dos m subgrupos é dado por

$$S_C = \frac{\bar{S}}{c_4} \quad \text{com} \quad \bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i,$$

tal que c_4 é a constante considerando o tamanho de amostra n .

A **estimativa de** σ via S_C é dada por

$$s_C = \frac{3,8875}{0,9399856} \approx 4,1357.$$

Ver arquivo [exemplo_07.r](#)

Estimando a variabilidade do processo (**estimador** S_D)

O **estimador** S_D baseado nas amplitudes amostrais R_i dos m subgrupos é dado por

$$S_D = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad \text{com} \quad \bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i,$$

tal que d_2 é a constante considerando o tamanho de amostra n .

A **estimativa de** σ via S_D é dada por

$$s_D = \frac{9,1625}{2,325929} \approx 3,9393.$$

Ver arquivo exemplo_07.r

Exemplo

Suponha que $X_{2j} \sim \mathcal{N}(\mathbf{1010}; 4)$. Altera-se somente a média do processo.

Tabela 9: Valores de X_{ij} , \bar{X}_i e R_i .

Amostra i	Elemento j da amostra i					\bar{X}_i	R_i	S_i
	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}			
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	1008,2	1009,3	1010,8	1008,4	1010,8	1009,5	2,6	1,3
2	1001,3	995,3	999,0	999,1	996,5	998,2	6,0	2,4
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6

Tabela 10: Estimativas de σ para diferentes estimadores.

Experimento	Estimativas			
	s_A	s_B	s_C	s_D
Tabela 8	4,0918	4,1136	4,1357	3,9393
Tabela 9	5,1136	8,4493	3,9894	3,7566

Ver arquivo exemplo_08.r

Distribuição Normal

Seja X uma variável aleatória com distribuição normal com parâmetros μ e σ^2 . Então, a função de densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \sigma^2 > 0.$$

Se $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, então diremos que a distribuição é normal padrão e, em geral, utilizaremos Z para denotar esta variável aleatória e $\phi(z)$ sua função de densidade de probabilidade.

A função de distribuição acumulada é dada por

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(w - \mu)^2\right\} dw$$

e denotaremos por $\Phi(z)$ a função de distribuição acumulada da normal padrão.

Distribuição Normal

$$\text{Mediana}(X) = \mu$$

$$\text{Moda}(X) = \mu$$

$$E(X) = \mu$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

$$\psi(\mathbf{s}) = \exp \left\{ \mathbf{s}\mu + \frac{\sigma^2 \mathbf{s}^2}{2} \right\}$$

$$\varphi(t) = \exp \left\{ it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right\}.$$

Denotaremos a distribuição normal com média μ e variância σ^2 por $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Distribuição Gama

Seja X uma variável aleatória com distribuição gama com parâmetros de forma α e de escala β . Então, a função de densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\{-\beta x\} \mathbb{I}_{[0, \infty)}(x), \quad \alpha > 0 \quad \text{e} \quad \beta > 0.$$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

$$\psi(s) = \left(\frac{\beta}{\beta - s} \right)^\alpha$$

$$\varphi(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - it} \right)^\alpha.$$

Denotaremos a distribuição gama com parâmetros α e β por $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$.

Se $\alpha = 1$, então $X \sim \mathcal{E}(\beta)$.

Distribuição Qui-quadrada

Seja X uma variável aleatória com distribuição qui-quadrada com (parâmetro) n graus de liberdade. Então, a função de densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} \exp\{-x/2\} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x), \quad \alpha > 0 \quad \text{e} \quad \beta > 0.$$

$$E(X) = n$$

$$\text{Var}(X) = 2n$$

$$\psi(s) = (1 - 2s)^{-n/2}$$

$$\varphi(t) = (1 - 2it)^{-n/2}.$$

Denotaremos a distribuição qui-quadrada com n graus de liberdade por χ_n^2 .

Note que $\chi_n^2 \equiv \mathcal{G}(n/2, 1/2)$.

S^2 : um estimador não tendencioso para σ^2

Suponha que (X_1, X_2, \dots, X_n) seja uma amostra aleatória simples de uma variável aleatória com distribuição normal com média μ e variância σ^2 .

Considere $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ com estimador de σ^2 e $S = \sqrt{S^2}$ como estimador de σ .

Sabemos que $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2 \equiv \mathcal{G}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Logo, $E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = n-1 \quad \Rightarrow \quad E(S^2) = \sigma^2$.

Como já sabíamos, S^2 é um estimador não tendencioso para σ^2 .

Vale ressaltar que, em geral, as amostras utilizadas nos gráficos de controle são pequenas. Por isto a preocupação com não tendenciosidade (nada de teoria para amostras grandes).

Pela desigualdade de Jensen, sabemos que $E(S) \neq \sigma$.

Distribuição de S^2

Agora, sejam $Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{G}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $V = \frac{\sigma^2 Y}{n-1} = S^2$.

Então,

$$\begin{aligned}F_V(v) &= \Pr(V \leq v) = \Pr\left(\frac{\sigma^2 Y}{n-1} \leq v\right) = \Pr\left(Y \leq \frac{(n-1)v}{\sigma^2}\right) \\ &= F_Y\left(\frac{(n-1)v}{\sigma^2}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_V(v) &= \frac{dF_V(v)}{dv} = f_Y\left(\frac{(n-1)v}{\sigma^2}\right) \frac{(n-1)}{\sigma^2} \\ &= \frac{(n-1)}{\sigma^2} \times \frac{(1/2)^{(n-1)/2}}{\Gamma[(n-1)/2]} \left[\frac{(n-1)v}{\sigma^2}\right]^{(n-1)/2-1} \exp\left[-\frac{(n-1)v}{2\sigma^2}\right] \\ &= \frac{[(n-1)/(2\sigma^2)]^{(n-1)/2}}{\Gamma[(n-1)/2]} v^{(n-1)/2-1} \exp\left[-\frac{(n-1)v}{2\sigma^2}\right].\end{aligned}$$

Portanto, $V \sim \mathcal{G}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2\sigma^2}\right)$.

Um estimador não tendencioso para σ

Temos que

$$\begin{aligned} E(S) &= E(V^{1/2}) = \int_0^{\infty} v^{1/2} f_V(v) dv \\ &= \int_0^{\infty} v^{1/2} \frac{[(n-1)/(2\sigma^2)]^{(n-1)/2}}{\Gamma[(n-1)/2]} v^{(n-1)/2-1} \exp\left[-\frac{(n-1)v}{2\sigma^2}\right] dv \\ &= \frac{[(n-1)/(2\sigma^2)]^{(n-1)/2}}{\Gamma[(n-1)/2]} \int_0^{\infty} v^{n/2-1} \exp\left[-\frac{(n-1)v}{2\sigma^2}\right] dv \\ &= \frac{[(n-1)/(2\sigma^2)]^{(n-1)/2}}{\Gamma[(n-1)/2]} \times \frac{\Gamma[n/2]}{[(n-1)/(2\sigma^2)]^{n/2}} \\ &= \frac{\sigma \Gamma[n/2]}{\Gamma[(n-1)/2]} \left(\frac{2}{n-1}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

$$\text{Defina } c_4 = \frac{\Gamma[n/2]}{\Gamma[(n-1)/2]} \left(\frac{2}{n-1}\right)^{1/2}.$$

Assim, $E\left(\frac{S}{c_4}\right) = \sigma$. Portanto, $\frac{S}{c_4}$ é um estimador não tendencioso para σ .

Distribuição conjunta do máximo e do mínimo de uma amostra aleatória

Seja (X_1, X_2, \dots, X_n) uma amostra aleatória simples de uma variável aleatória com função de distribuição acumulada F_X . Defina

$U = X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ e $V = X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$. A função de distribuição

acumulada conjunta de U e V é dada por

$$F_{U,V}(u, v) = [F_X(v)]^n - [F_X(v) - F_X(u)]^n.$$

$$\begin{aligned} F_{U,V}(u, v) &= \Pr(U \leq u; V \leq v) = \Pr(X_{(1)} \leq u; X_{(n)} \leq v) \\ &= \Pr(X_{(1)} \leq \infty; X_{(n)} \leq v) - \Pr(X_{(1)} > u; X_{(n)} \leq v) \\ &= \Pr(X_1 \leq v; \dots; X_n \leq v) - \Pr(u < X_1 \leq v; \dots; u < X_n \leq v) \\ &\quad \text{(independência)} \\ &= \prod_{i=1}^n \Pr(X_i \leq v) - \prod_{i=1}^n [\Pr(X_i \leq v) - \Pr(X_i \leq u)] \\ &\quad \text{(identicamente distribuídas)} \\ &= [F_X(v)]^n - [F_X(v) - F_X(u)]^n, \quad \text{para } u \leq v. \end{aligned}$$

- Se X_i for contínua, então
 $f_{U,V}(u, v) = n(n-1)f_X(v)f_X(u)[F_X(v) - F_X(u)]^{n-2}$, para $u \leq v$.

Prova: Basta derivar a distribuição conjunta com respeito a u e v .

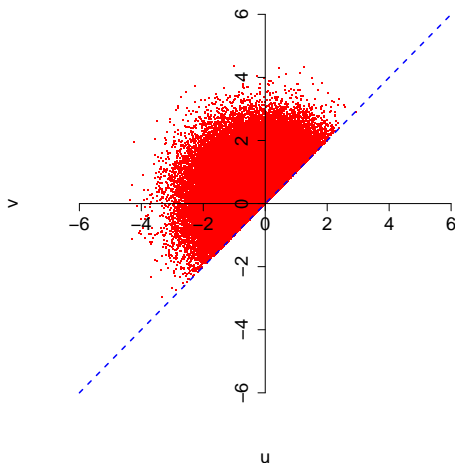
- As distribuições marginais de $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ são $F_U(u) = 1 - [1 - F_X(u)]^n$ e $F_V(v) = [F_X(v)]^n$.

Prova: Basta tomar os limites de $u \rightarrow \infty$ ou $v \rightarrow \infty$ na função de distribuição acumulada conjunta de U e V para se obter as marginal de V e U , respectivamente.

- Se X_i for contínua, então $f_U(u) = nf_X(u)[1 - F_X(u)]^{n-1}$ e $f_V(v) = nf_X(v)[F_X(v)]^{n-1}$.

Prova: Basta derivar as funções de distribuições acumulada marginais dada no Item anterior.

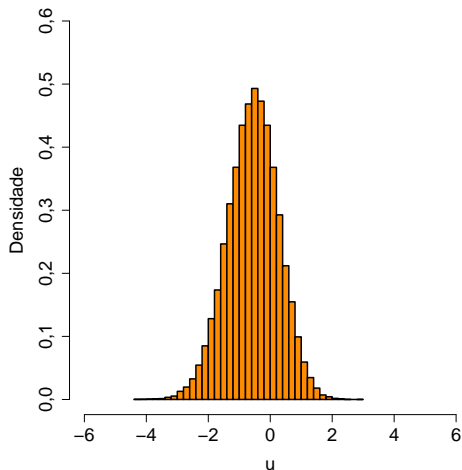
Gráfico de dispersão do máximo e do mínimo (de duas normais padrão)



Temos que $U = \min(Z_1, Z_2)$ e $V = \max(Z_1, Z_2)$ em que $Z_i \sim \mathcal{N}(0; 1)$, $i = 1, 2$.

Ver arquivo [exemplo_09.r](#)

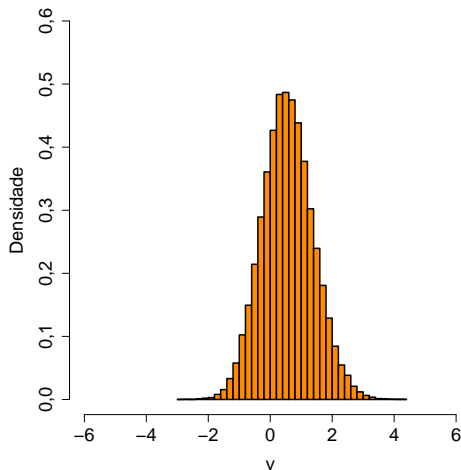
Histograma de uma amostra de $U = \min(Z_1, Z_2)$



Temos que $U = \min(Z_1, Z_2)$ em que $Z_i \sim \mathcal{N}(0; 1)$, $i = 1, 2$.

Ver arquivo [exemplo_09.r](#)

Histograma de uma amostra de $V = \max(Z_1, Z_2)$



Temos que $V = \max(Z_1, Z_2)$ em que $Z_i \sim \mathcal{N}(0; 1)$, $i = 1, 2$.

Ver arquivo exemplo_09.r

Função de distribuição da amplitude

Defina as seguintes variáveis aleatórias: $U = X_{(1)}$, $V = X_{(n)}$ e $R = V - U$.

É fácil verificar que R é uma variável aleatória com suporte $[0, \infty)$.

Segue-se que

$$\begin{aligned}F_R(r) &= \Pr(R \leq r) = \Pr(V - U \leq r) = \Pr(V \leq U + r) \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_u^{u+r} f_{U,V}(u, v) dv du = \int_{-\infty}^{\infty} \int_u^{u+r} f_{V|U}(v|u) f_U(u) dv du \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_u^{u+r} f_{V|U}(v|u) dv \right] f_U(u) ds \\&= \int_{-\infty}^{\infty} [F_{V|U}(u+r|u) - F_{V|U}(u|u)] f_U(u) du \\&= \int_{-\infty}^{\infty} F_{V|U}(u+r|u) f_U(u) du, \quad \text{pois } F_{V|U}(u|u) = 0.\end{aligned}$$

Lembre-se que para u fixo, $v \geq u$.

Função de densidade de probabilidade da amplitude

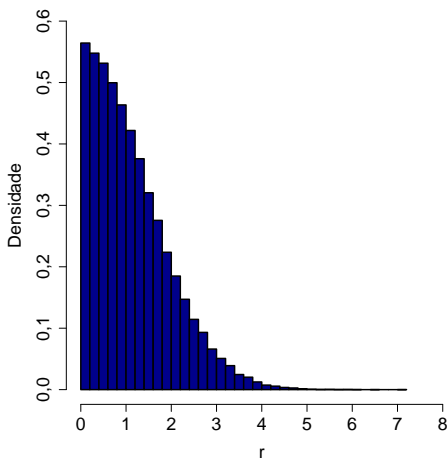
$$\begin{aligned}f_R(r) &= \frac{dF_R(r)}{dr} = \frac{d}{dr} \int_{-\infty}^{\infty} F_{V|U}(u+r|u)f_U(u)du \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dr} F_{V|U}(u+r|u)f_U(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f_{V|U}(u+r|u)f_U(u)du \\&= \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, u+r)du \\&= n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_X(u+r) [F_X(u+r) - F_X(u)]^{n-2} du.\end{aligned}$$

Para o caso que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, e fazendo a mudança de variável $z = \frac{u - \mu}{\sigma}$, temos que

$$f_R(r) = \frac{n(n-1)}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)\phi(z+r/\sigma)[\Phi(z+r/\sigma) - \Phi(z)]^{n-2} dz.$$

sendo ϕ e Φ como as funções definidas anteriormente.

Histograma de uma amostra de $R = V - U$ (amplitude)



Temos que $U = \min(Z_1, Z_2)$, $V = \max(Z_1, Z_2)$ e $R = V - U$ em que $Z_i \sim \mathcal{N}(0; 1)$, $i = 1, 2$.

Ver arquivo exemplo_09.r

Função de densidade de probabilidade da **amplitude relativa**

Defina $W = \frac{R}{\sigma}$ como a **amplitude relativa**.

Temos que $F_W(w) = \Pr(W \leq w) = \Pr(R \leq w\sigma) = F_R(w\sigma)$.

Assim,

$$f_W(w) = f_R(w\sigma)\sigma = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)\phi(z+w)[\Phi(z+w) - \Phi(z)]^{n-2} dz.$$

Segue-se que

$$E(W) = \frac{1}{\sigma} E(R) \implies E(R) = E(W)\sigma, \text{ e}$$

$$DP(W) = \frac{1}{\sigma} DP(R) \implies DP(R) = DP(W)\sigma.$$

Defina as seguintes quantidades:

- $d_2 = E(W)$; e
- $d_3 = DP(W) = \sqrt{\text{Var}(W)} = \sqrt{\sigma_W^2}$.

As integrais são resolvidas de forma numérica e os resultados apresentados em uma tabela.

Na prática, utilizaremos as relações anteriores para estimar a média e o desvio padrão da amplitude amostral com o intuito de calcular os limites de controle.

Assim,

$$\begin{aligned} E(R) = d_2\sigma &\implies \widehat{E}(R) = d_2\widehat{\sigma}, \quad \text{e} \\ DP(R) = d_3\sigma &\implies \widehat{DP}(R) = d_3\widehat{\sigma}. \end{aligned}$$

Observação: note que $d_2 = E(W) = E(Z_{(n)}) - E(Z_{(1)})$ sendo $Z_{(n)}$ e $Z_{(1)}$ o máximo e o mínimo, respectivamente, de uma amostra de uma variável aleatória Z (padronizada). Se Z tiver distribuição simétrica, então $E(Z_{(n)}) = -E(Z_{(1)})$ e $\text{Var}(Z_{(n)}) = \text{Var}(Z_{(1)})$.

Ver arquivo exemplo_09.r

Constantes

Tabela 11: Constantes d_2 , d_3 e c_4 para diferentes tamanhos de amostras n .

n	d_2	d_3	c_4	n	d_2	d_3	c_4
2	1,128379	0,8525025	0,7978846	21	3,778336	0,7241733	0,9875829
3	1,692569	0,8883680	0,8862269	22	3,819385	0,7199148	0,9881703
4	2,058751	0,8798082	0,9213177	23	3,858323	0,7158867	0,9887045
5	2,325929	0,8640819	0,9399856	24	3,895348	0,7120682	0,9891927
6	2,534413	0,8480397	0,9515329	25	3,930629	0,7084408	0,9896404
7	2,704357	0,8332053	0,9593688	26	3,964316	0,7049883	0,9900525
8	2,847201	0,8198315	0,9650305	27	3,996539	0,7016966	0,9904330
9	2,970026	0,8078343	0,9693107	28	4,027414	0,6985528	0,9907856
10	3,077505	0,7970507	0,9726593	29	4,057044	0,6955457	0,9911130
11	3,172873	0,7873146	0,9753501	30	4,085522	0,6926651	0,9914181
12	3,258455	0,7784783	0,9775594	31	4,112928	0,6899019	0,9917028
13	3,335980	0,7704162	0,9794056	32	4,139338	0,6872480	0,9919693
14	3,406763	0,7630231	0,9809714	33	4,164817	0,6846958	0,9922192
15	3,471827	0,7562114	0,9823162	34	4,189426	0,6822388	0,9924540
16	3,531983	0,7499081	0,9834835	35	4,213219	0,6798708	0,9926751
17	3,587884	0,7440518	0,9845064	36	4,236247	0,6775862	0,9928836
18	3,640064	0,7385909	0,9854100	37	4,258554	0,6753800	0,9930805
19	3,688963	0,7334815	0,9862141	38	4,280183	0,6732476	0,9932668
20	3,734950	0,7286863	0,9869343	39	4,301171	0,6711846	0,9934434
				40	4,321554	0,6691872	0,9936109

Gráficos de controle por variáveis

Construindo os gráficos de controle de \bar{X} e R

- Concentrar em controle de variáveis do tipo contínua.
- Monitorar a centralidade e a dispersão destas variáveis.
- Em geral, monitora-se \bar{X} como centralidade e R como dispersão.

Para o gráfico de \bar{X} , temos

- A linha média $LM_{\bar{X}}$ é localizada no valor esperado de \bar{X} .
- O limite inferior de controle $LIC_{\bar{X}}$ e o limite superior de controle $LSC_{\bar{X}}$ são geralmente estabelecidos a três desvios padrões da média:

$$\begin{aligned}LSC_{\bar{X}} &= \mu_{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}} \\LM_{\bar{X}} &= \mu_{\bar{X}} \\LIC_{\bar{X}} &= \mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}}.\end{aligned}$$

Se o processo estiver em controle, evite ajustes desnecessários, que só tendem a aumentar sua variabilidade.

Supondo que a amostra seja aleatória simples (independentes e identicamente distribuídos; iid), temos:

- $\mu_{\bar{X}} = \mu_X = \mu$ (identicamente distribuídos); e
- $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (iid).

Para determinar os limites de controle, precisamos saber μ e σ para o processo em controle.

Denotaremos μ_0 e σ_0 os valores quando o processo está em controle.

Na prática, desconhecemos estes valores e os estimaremos por $\hat{\mu}_0$ e $\hat{\sigma}_0$.

Assim, temos os limites de controle estimados por:

$$\begin{aligned}LSC_{\bar{X}} &= \hat{\mu}_0 + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} \\LM_{\bar{X}} &= \hat{\mu}_0 \\LIC_{\bar{X}} &= \hat{\mu}_0 - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Para monitorar a dispersão com o gráfico de R , temos

$$LSC_R = \mu_R + 3\sigma_R$$

$$LM_R = \mu_R$$

$$LIC_R = \mu_R - 3\sigma_R.$$

Se supormos normalidade da distribuição dos dados, então

$$\mu_R = d_2\sigma \quad \text{e} \quad \sigma_R = d_3\sigma.$$

sendo que d_2 e d_3 só dependem do tamanho da amostra.

Podemos estimar σ utilizando $\hat{\sigma}_0$ com o processo em controle.

Assim, estimamos os limites de controle por

$$LSC_R = d_2\hat{\sigma}_0 + 3d_3\hat{\sigma}_0$$

$$LM_R = d_2\hat{\sigma}_0$$

$$LIC_R = d_2\hat{\sigma}_0 - 3d_3\hat{\sigma}_0.$$

Lembrando que $LIC_R \geq 0$.

Dado um conjunto inicial de m amostras, temos

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij} \quad (\text{m\u00e9dia da } i\text{-\u00e9sima amostra})$$

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}$$

$$R_i = \max_{1 \leq j \leq n} X_{ij} - \min_{1 \leq j \leq n} X_{ij} \quad (\text{amplitude da } i\text{-\u00e9sima amostra})$$

$$\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i$$

$$\hat{\sigma}_0 = S_D = \frac{\bar{R}}{d_2}.$$

Podemos reescrever os limites de controle e a linha m\u00e9dia estimados como:

$$LSC_R = d_2 \hat{\sigma}_0 + 3d_3 \hat{\sigma}_0 = \bar{R} + 3 \frac{d_3}{d_2} \bar{R} = \bar{R} \left(1 + 3 \frac{d_3}{d_2} \right)$$

$$LM_R = d_2 \hat{\sigma}_0 = \bar{R}$$

$$LIC_R = d_2 \hat{\sigma}_0 - 3d_3 \hat{\sigma}_0 = \bar{R} - 3 \frac{d_3}{d_2} \bar{R} = \bar{R} \left(1 - 3 \frac{d_3}{d_2} \right).$$

Exemplo

Tabela 12: Valores de X_{ij} e R_i .

i	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	R_i
1	1004,6	997,3	1003,0	1005,9	995,8	10,1
2	1001,6	1008,6	997,9	1001,3	999,1	10,7
3	999,1	992,6	1001,1	1001,6	1002,9	10,3
4	1007,9	997,5	991,3	997,8	1000,8	16,6
5	999,5	995,6	1004,3	995,6	991,4	12,9
6	1003,3	996,8	997,2	993,6	1000,1	9,7
7	999,7	1012,1	995,2	1001,8	1002,2	16,9
8	1000,1	995,3	990,0	997,5	1003,2	13,2
9	1004,3	1001,4	1001,6	999,1	996,4	7,9
10	999,0	995,8	989,9	995,1	1002,8	12,9
11	1003,2	1004,4	993,5	994,6	997,6	10,9
12	996,2	1017,3	993,6	996,5	1003,7	23,7
13	1014,0	1008,9	1004,1	1007,9	1000,7	13,3
14	1002,2	996,6	1002,7	1004,2	1001,8	7,6
15	998,3	997,5	1006,1	996,5	998,1	9,6
16	995,8	1000,8	999,1	1002,5	1001,0	6,7
17	1004,1	1003,0	1004,8	997,9	999,9	6,9
18	1000,1	994,9	1000,1	1004,9	997,3	10,0
19	1000,2	996,1	998,0	1006,1	999,4	10,0
20	1002,3	999,0	1000,8	1000,7	998,0	4,3
21	998,3	998,1	1004,2	1002,1	991,3	12,9
22	997,1	1000,7	999,8	1000,6	1001,7	4,6
23	1003,6	996,1	1001,4	998,0	991,8	11,8
24	999,9	1006,4	1005,1	999,8	1003,0	6,6
25	1007,3	999,8	992,5	996,2	998,2	14,8

Exemplo (continuação)

Começaremos com os limites de controle da amplitude.

Da Tabela 12, temos $\bar{R} = 11,0$. Assim,

$$LSC_R = 10,996 \left(1 + 3 \times \frac{0,86408}{2,32593} \right) = 10,996 \times 2,1145 = 23,251$$

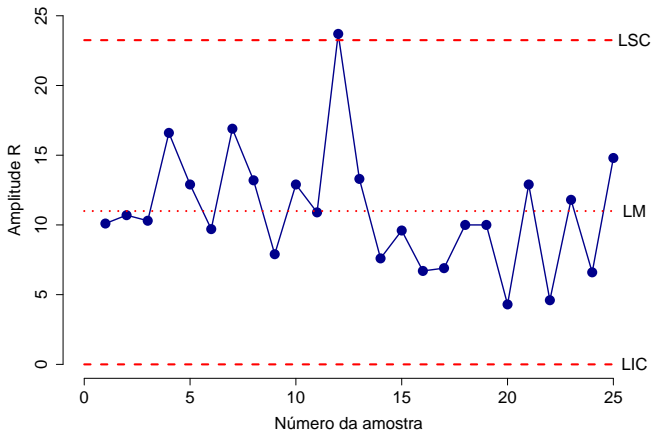
$$LM_R = 10,996$$

$$LIC_R = 10,996 \left(1 + 3 \times \frac{0,86408}{2,32593} \right) = 10,996 \times (-0,1145) = -1,259.$$

Como o valor de $LIC_R < 0$, tomamos $LIC_R = 0$.

Ver arquivo exemplo_10.r

Exemplo (continuação)



A amostra 12 está com uma dispersão incomum e deve ser investigada.

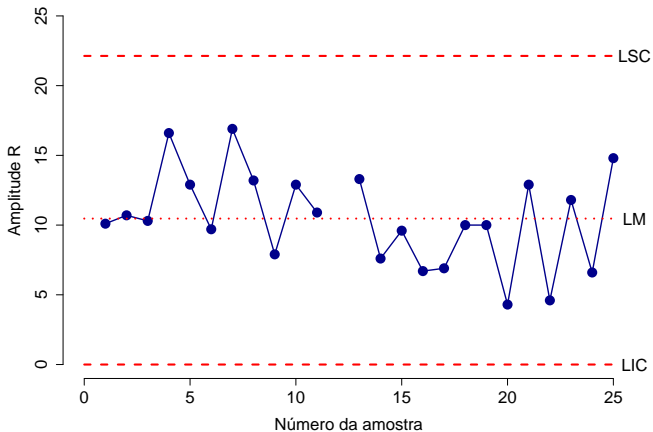
Exemplo (continuação)

Tabela 13: Valores de X_{ij} e R_i .

i	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	R_i
1	1004,6	997,3	1003,0	1005,9	995,8	10,1
2	1001,6	1008,6	997,9	1001,3	999,1	10,7
3	999,1	992,6	1001,1	1001,6	1002,9	10,3
4	1007,9	997,5	991,3	997,8	1000,8	16,6
5	999,5	995,6	1004,3	995,6	991,4	12,9
6	1003,3	996,8	997,2	993,6	1000,1	9,7
7	999,7	1012,1	995,2	1001,8	1002,2	16,9
8	1000,1	995,3	990,0	997,5	1003,2	13,2
9	1004,3	1001,4	1001,6	999,1	996,4	7,9
10	999,0	995,8	989,9	995,1	1002,8	12,9
11	1003,2	1004,4	993,5	994,6	997,6	10,9
12						
13	1014,0	1008,9	1004,1	1007,9	1000,7	13,3
14	1002,2	996,6	1002,7	1004,2	1001,8	7,6
15	998,3	997,5	1006,1	996,5	998,1	9,6
16	995,8	1000,8	999,1	1002,5	1001,0	6,7
17	1004,1	1003,0	1004,8	997,9	999,9	6,9
18	1000,1	994,9	1000,1	1004,9	997,3	10,0
19	1000,2	996,1	998,0	1006,1	999,4	10,0
20	1002,3	999,0	1000,8	1000,7	998,0	4,3
21	998,3	998,1	1004,2	1002,1	991,3	12,9
22	997,1	1000,7	999,8	1000,6	1001,7	4,6
23	1003,6	996,1	1001,4	998,0	991,8	11,8
24	999,9	1006,4	1005,1	999,8	1003,0	6,6
25	1007,3	999,8	992,5	996,2	998,2	14,8

Exemplo (continuação)

Eliminando a amostra 12, obtemos $LSC_R = 22,13$, $LM_R = 10,47$ e $LIC_R = 0$.



Ver arquivo exemplo_11.r

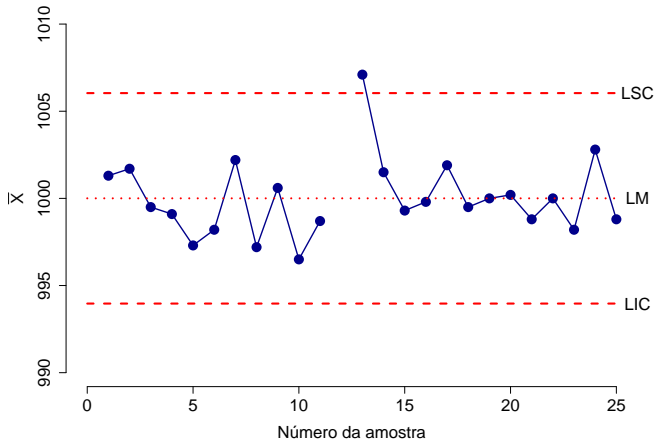
Exemplo (continuação)

Tabela 14: Valores de X_{ij} e R_i .

i	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	\bar{X}_i
1	1004,6	997,3	1003,0	1005,9	995,8	1001,3
2	1001,6	1008,6	997,9	1001,3	999,1	1001,7
3	999,1	992,6	1001,1	1001,6	1002,9	999,5
4	1007,9	997,5	991,3	997,8	1000,8	999,1
5	999,5	995,6	1004,3	995,6	991,4	997,3
6	1003,3	996,8	997,2	993,6	1000,1	998,2
7	999,7	1012,1	995,2	1001,8	1002,2	1002,2
8	1000,1	995,3	990,0	997,5	1003,2	997,2
9	1004,3	1001,4	1001,6	999,1	996,4	1000,6
10	999,0	995,8	989,9	995,1	1002,8	996,5
11	1003,2	1004,4	993,5	994,6	997,6	998,7
12						
13	1014,0	1008,9	1004,1	1007,9	1000,7	1007,1
14	1002,2	996,6	1002,7	1004,2	1001,8	1001,5
15	998,3	997,5	1006,1	996,5	998,1	999,3
16	995,8	1000,8	999,1	1002,5	1001,0	999,8
17	1004,1	1003,0	1004,8	997,9	999,9	1001,9
18	1000,1	994,9	1000,1	1004,9	997,3	999,5
19	1000,2	996,1	998,0	1006,1	999,4	1000,0
20	1002,3	999,0	1000,8	1000,7	998,0	1000,2
21	998,3	998,1	1004,2	1002,1	991,3	998,8
22	997,1	1000,7	999,8	1000,6	1001,7	1000,0
23	1003,6	996,1	1001,4	998,0	991,8	998,2
24	999,9	1006,4	1005,1	999,8	1003,0	1002,8
25	1007,3	999,8	992,5	996,2	998,2	998,8

Para a média do processo (eliminando a amostra 12), temos

$$\hat{\sigma}_0 = 4,50, \quad LSC_{\bar{X}} = 1006,04, \quad LM_{\bar{X}} = 1000,0 \quad \text{e} \quad LIC_{\bar{X}} = 993,97.$$



Temos problema com a amostra 13 também.

[Ver arquivo exemplo_12.r](#)

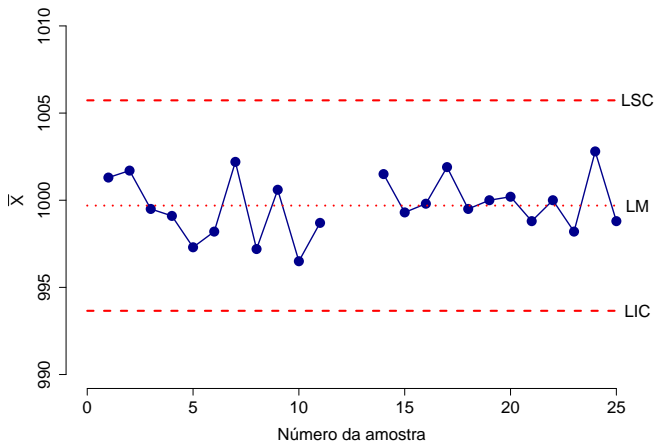
Exemplo (continuação)

Tabela 15: Valores de X_{ij} e R_i .

i	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	\bar{X}_i
1	1004,6	997,3	1003,0	1005,9	995,8	1001,3
2	1001,6	1008,6	997,9	1001,3	999,1	1001,7
3	999,1	992,6	1001,1	1001,6	1002,9	999,5
4	1007,9	997,5	991,3	997,8	1000,8	999,1
5	999,5	995,6	1004,3	995,6	991,4	997,3
6	1003,3	996,8	997,2	993,6	1000,1	998,2
7	999,7	1012,1	995,2	1001,8	1002,2	1002,2
8	1000,1	995,3	990,0	997,5	1003,2	997,2
9	1004,3	1001,4	1001,6	999,1	996,4	1000,6
10	999,0	995,8	989,9	995,1	1002,8	996,5
11	1003,2	1004,4	993,5	994,6	997,6	998,7
12						
13						
14	1002,2	996,6	1002,7	1004,2	1001,8	1001,5
15	998,3	997,5	1006,1	996,5	998,1	999,3
16	995,8	1000,8	999,1	1002,5	1001,0	999,8
17	1004,1	1003,0	1004,8	997,9	999,9	1001,9
18	1000,1	994,9	1000,1	1004,9	997,3	999,5
19	1000,2	996,1	998,0	1006,1	999,4	1000,0
20	1002,3	999,0	1000,8	1000,7	998,0	1000,2
21	998,3	998,1	1004,2	1002,1	991,3	998,8
22	997,1	1000,7	999,8	1000,6	1001,7	1000,0
23	1003,6	996,1	1001,4	998,0	991,8	998,2
24	999,9	1006,4	1005,1	999,8	1003,0	1002,8
25	1007,3	999,8	992,5	996,2	998,2	998,8

Eliminando as amostras 12 e 13, obtemos

$$\hat{\sigma}_0 = 4,50, \quad LSC_{\bar{X}} = 1005,7, \quad , LM_{\bar{X}} = 999,7 \quad e \quad LIC_{\bar{X}} = 993,7.$$



Ver arquivo exemplo_13.r