

ECONOMETRIA FINANCEIRA

Ralph dos Santos Silva

<http://www.ralphsilva.org/econometriafinanceira.html>

**Pós-graduação
Especialização em Atuária**

Instituto de Matemática
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Ementa

- **Séries temporais financeiras**
- **Modelos dinâmicos (modelos em espaço de estados)**
- **Modelos heteroscedásticos**
 - ◆ **Modelos GARCH**
 - ◆ **Modelos de volatilidade estocástica**
 - ◆ **Valor em Risco (V@R)**

Referências

- ★ ***Analysis of Financial Time Series***, 3rd Edition, R. S. Tsay, 2010, John Wiley.
- ★ *Econometria Financeira - Um Curso em Séries Temporais Financeiras*, 3^a Edição, P. A. Morettin, 2017, Blucher.
- ★ *The Econometric Modelling of Financial Time Series*, 3rd Edition, T. C. Mills and R. N. Markellos, 2008, Cambridge University Press.
- ★ ***Applied Bayesian Forecasting and Time Series Analysis***, A. Pole, M. West and J. Harrison, 1994, Springer.

Motivação



Figura: Índice BOVESPA de 3 de janeiro de 2011 até 10 de setembro de 2021.

Ver arquivo exemplo_01.r

Séries temporais financeiras

- Foco em teoria e na prática da avaliação de ativos através do tempo.
- As séries empíricas contêm elementos de incerteza.
- Estudo da volatilidade em séries financeiras.
- Daremos ênfase em aplicações e análise de dados.

Retornos de ativos

- ◆ Em geral, observa-se uma série de preços.
- ◆ Contudo, estudos envolvem retornos de ativos ao invés de preços.
- ◆ O retorno de um ativo é um resumo completo e de escala livre da oportunidade de investimento.
- ◆ Devido suas propriedades estatísticas, séries de retornos são mais fáceis de se trabalhar do que preços.
- ◆ Existem várias definições para retornos de um ativo.
- ◆ Seja P_t o preço de um ativo no instante t .
- ◆ **Suponha que o ativo não paga dividendos.**

Retorno de um período:

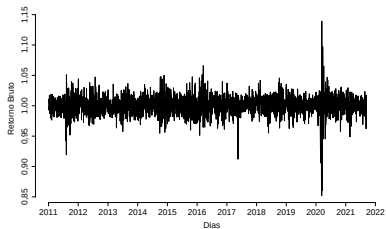
Fixando o ativo pelo período de tempo de $t - 1$ a t , definimos:

- ▶ **retorno bruto** por

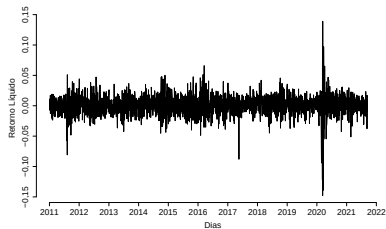
$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}};$$

- ▶ **retorno líquido** por

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}.$$



(a) Retorno bruto



(b) Retorno líquido

Figura: Retornos do IBOVESPA de 4 de janeiro de 2011 até 10 de setembro de 2021.

Ver arquivo exemplo_02.r

Retorno de vários períodos:

Fixando o ativo pelos períodos de tempo entre $t - k$ a t , temos o **retorno bruto de k períodos** (ou **o retorno composto**) dado por

$$1 + R_t[k] = \frac{P_t}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \times \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \times \cdots \times \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} = \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}).$$

O **retorno líquido para k períodos** é dado por

$$R_t[k] = \frac{P_t}{P_{t-k}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}}.$$

Se um ativo é mantido por k períodos, então o retorno (líquido) médio é dado por

$$\begin{aligned}\tilde{R}_t[k] &= \overbrace{\left[\prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}) \right]}^{\text{média geométrica}}^{1/k} - 1 \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln(1 + R_{t-j}) \right\} - 1.\end{aligned}$$

Uma aproximação de Taylor de primeira ordem para o retorno médio é dada por

$$\tilde{R}_t[k] \simeq \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} R_{t-j},$$

pois

$$g(x) = \ln(1 + x) \simeq x \quad \text{e} \quad h(x) = \exp(x) \simeq 1 + x,$$

para x próximo de zero (tomando $x_0 = 0$).

Esta aproximação pode ser ruim em alguns casos.

Capitalização contínua

- Suponha que a taxa de juros de um depósito bancário seja 10% ao ano e que o depósito inicial seja de \$1,00.
- Se o banco paga os juros uma vez ao ano, então o valor líquido do depósito se torna $\$1,00 \times (1 + 0,1) = \$1,10$ depois de um ano.
- Se o banco paga os juros a cada 6 meses, então a taxa de juros é $10\%/2 = 5\%$ e o valor líquido do depósito é $\$1,00 \times (1 + 0,1/2)^2 = \$1,1025$ depois de um ano.
- Se o banco paga os juros m vezes por ano, então a taxa de juros é $10\%/m$ e o valor líquido do depósito é $\$1,00 \times (1 + 0,1/m)^m$ depois de um ano.
- A tabela a seguir mostra resultados para alguns intervalos de tempo sobre um depósito de \$1,00 com juros de 10% ao ano.
- O valor líquido se aproxima de \$1,1052, que é obtido por $\exp(0,1)$ e é referido como o resultado da **capitalização contínua**.
- O efeito da capitalização pode ser claramente visto.

Tabela: Ilustração do efeito da capitalização^a.

Tipo	Número de Pagamentos	Taxa de Juros por Período	Valor Líquido
Anual	1	0,1	1,10000
Semestral	2	0,05	1,10250
Trimestral	4	0,025	1,10381
Mensal	12	0,0083	1,10471
Semanal	52	0,1/52	1,10506
Diário	365	0,1/365	1,10516
Contínuo	∞		1,10517

^a O intervalo de tempo é de 1 ano e a taxa de juros é 10%.

A função exponencial pode ser representada por

$$\exp(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m.$$

Retorno de capitalização contínua

O logaritmo natural de um retorno bruto de um ativo é chamado de **retorno de capitalização contínua** ou **log retorno**:

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln P_t - \ln P_{t-1}.$$

Considerando log retornos de vários períodos, temos

$$\begin{aligned} r_t[k] &= \ln(1 + R_t[k]) = \ln((1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \dots (1 + R_{t-k+1})) \\ &= \ln(1 + R_t) + \ln(1 + R_{t-1}) + \dots + \ln(1 + R_{t-k+1}) \\ &= r_t + r_{t-1} + \dots + r_{t-k+1} \end{aligned}$$

- O log retorno de vários períodos é simplesmente a soma dos log retornos de um período.
- Propriedades estatísticas dos log retornos são mais tratáveis.
- Note também que $r_t[k] = \ln P_t - \ln P_{t-k}$.

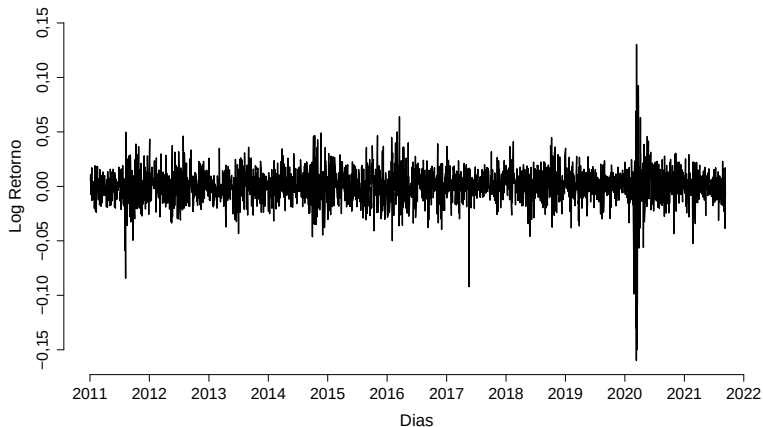


Figura: Log retornos do IBOVESPA de 4 de janeiro de 2011 até 10 de setembro de 2021.

Ver arquivo exemplo_03.r

Propriedades

Seja X uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade $f(x)$.

Momentos ordinários:

$$E(X^\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} x^\ell f(x) dx.$$

Definimos $\mu_x = E(X)$ como a **média**.

Momentos centrais:

$$E([X - \mu_x]^\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^\ell f(x) dx.$$

Definimos $\sigma_x^2 = E([X - \mu_x]^2)$ como a **variância**.

Definimos $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$ como **desvio padrão**.

O **coeficiente de assimetria** é definido por

$$S(X) = E \left(\left[\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \right]^3 \right) = \frac{E([X - \mu_X]^3)}{\sigma_X^3}$$

e o **coeficiente de curtose** por

$$K(X) = E \left(\left[\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \right]^4 \right) = \frac{E([X - \mu_X]^4)}{\sigma_X^4}.$$

A quantidade $K(X) - 3$ é chamada de **excesso de curtose** porque $K(X) = 3$ para a distribuição normal¹.

Uma distribuição com excesso de curtose positivo é dita ter **caudas pesadas** (leptocúrtica).

Uma distribuição com excesso de curtose negativo é dita ter **caudas leves** (platicúrtica).

¹Se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, então $K(X) = 3$.

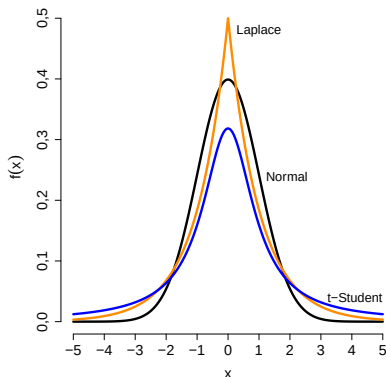


Figura: Comparação das funções de densidades de probabilidades da normal, Laplace e t -Student com 1 grau de liberdade.

- ◆ A curtose da Laplace é maior que a curtose da normal.
- ◆ A curtose da t -Student² é maior que a curtose da Laplace.

²Distribuição t -Student com 1 grau de liberdade ou distribuição de Cauchy.

Momentos amostrais

Suponha que $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ seja uma amostra aleatória de X com n observações.

- Média amostral:

$$\hat{\mu}_x = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t.$$

- Variância amostral:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2.$$

- O coeficiente de assimetria amostral:

$$\hat{S}(X) = \frac{M^3}{\hat{\sigma}_x^3} \quad \text{com} \quad M^3 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^3.$$

- O coeficiente de curtose amostral:

$$\hat{K}(X) = \frac{M^4}{\hat{\sigma}_x^4} \quad \text{com} \quad M^4 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^4.$$

M^ℓ , $\ell = 1, 2, \dots$, podem ser chamados de **momentos centrais amostrais**.

Testes de Assimetria e Curtose

Sob a hipótese de normalidade (**a amostra aleatória é proveniente de uma distribuição normal**), temos que

$$\hat{S}(X) \approx \mathcal{N}(0, 6/n) \quad \text{e} \quad \hat{K}(X) \approx \mathcal{N}(3, 24/n)$$

para n “suficientemente grande”.

Dado uma amostra aleatória $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de X , para testar a assimetria da distribuição de X , consideramos

$$\begin{cases} H_0 : & S(X) = 0 \\ H_1 : & S(X) \neq 0. \end{cases}$$

A estatística da razão t -Student da assimetria é

$$T = \frac{\hat{S}(X)}{\sqrt{6/n}} \approx \mathcal{N}(0, 1).$$

Rejeitamos H_0 ao nível α de significância se $|T_{obs}| > z_{1-\alpha/2}$, em que $z_{1-\alpha/2}$ é o percentil $100(1 - \alpha/2)$ da distribuição normal padrão.

Para testar o excesso de curtose da distribuição de X , consideramos

$$\begin{cases} H_0 : & K(X) - 3 = 0 \\ H_1 : & K(X) - 3 \neq 0. \end{cases}$$

A estatística da razão t -Student do excesso de curtose é

$$T = \frac{\hat{K}(X) - 3}{\sqrt{24/n}} \approx \mathcal{N}(0, 1).$$

Rejeitamos H_0 ao nível α de significância se $|T_{obs}| > z_{1-\alpha/2}$, em que $z_{1-\alpha/2}$ é o percentil $100(1 - \alpha/2)$ da distribuição normal padrão.

Teste de Normalidade de Jarque-Bera

Considere o seguinte teste de hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : & \text{A amostra aleatória é proveniente de uma dist. normal;} \\ H_1 : & \text{A amostra aleatória não é proveniente de uma dist. normal.} \end{cases}$$

A estatística do teste de normalidade de **Jarque e Bera** é dada por

$$JB = \frac{\hat{S}^2(X)}{6/n} + \frac{(\hat{K}(X) - 3)^2}{24/n} \approx \chi_2^2,$$

para n “suficientemente grande”.

Rejeitamos H_0 (normalidade) se $JB > \chi_{1-\alpha}^*$, em que $\chi_{1-\alpha}^*$ é o percentil $100(1 - \alpha)$ da distribuição χ_2^2 .

Ver arquivo exemplo_04.r

Distribuição dos retornos

A forma geral do modelo dos log retornos de um ativo, $\{r_t; t = 1, \dots, n\}$, é sua função de distribuição conjunta:

$$F_r(r_1, r_2, \dots, r_n | \mathbf{C}, \boldsymbol{\theta}),$$

em que

- $\mathbf{C}$ é um vetor de estados consistindo de variáveis que resumem o ambiente em que os retornos do ativo foram determinando; e
- $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros que determina unicamente a função de distribuição $F_r(\cdot)$.

Para um determinado ativo, podemos escrever

$$\begin{aligned}F_r(r_1, r_2, \dots, r_n) &= F_r(r_1)F_r(r_2|r_1)F_r(r_3|r_1, r_2) \dots F_r(r_n|r_1, r_2, \dots, r_{n-1}) \\&= F_r(r_1) \prod_{t=2}^n F_r(r_t|r_1, r_2, \dots, r_{t-1}),\end{aligned}$$

sendo o vetor de parâmetros θ omitido na notação.

Para distribuições contínuas, temos que

$$\begin{aligned}f_r(r_1, r_2, \dots, r_n) &= f_r(r_1)f_r(r_2|r_1)f_r(r_3|r_1, r_2) \dots f_r(r_n|r_1, r_2, \dots, r_{n-1}) \\&= f_r(r_1) \prod_{t=2}^n f_r(r_t|r_1, r_2, \dots, r_{t-1}),\end{aligned}$$

sendo o vetor de parâmetros θ omitido na notação.

Função de verossimilhança dos retornos

Sejam $\{r_1, \dots, r_n\}$ os log retornos de um ativo. Então, supondo distribuições condicionais normais, temos que

$$f(r_1, \dots, r_n | \theta) = f(r_1 | \theta) \prod_{t=2}^n [2\pi]^{-1/2} [\sigma_t^2]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_t^2} (r_t - \mu_t)^2 \right\},$$

em que

- μ_t é a média condicional (depende de θ)
(o nível da série pode mudar ao longo do tempo); e
- σ_t^2 é a variância condicional (depende de θ)
(a variabilidade da série pode mudar ao longo do tempo).

O logaritmo da função de verossimilhança é dado por

$$\ln f(r_1, \dots, r_n | \theta) = \ln f(r_1 | \theta) - \frac{n-1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n \left[\ln \sigma_t^2 + \frac{1}{\sigma_t^2} (r_t - \mu_t)^2 \right].$$

Volatilidade

Além dos retornos de um ativo, consideraremos também:

a volatilidade deste ativo.

O processo de volatilidade foca na evolução da variância condicional dos retornos através do tempo.

A volatilidade tem papel importante na precificação de opções e na gestão de riscos.

Ver arquivo exemplo_05.r

Trabalho I

Analise os seguintes conjuntos de dados:

1. Preços da AMBEV (em ABEV3_SA.csv); e
2. Preços da PETROBRAS (em PETR3_SA.csv).

Em ambos os casos, utilize os preços de fechamento.

Compare os resultados obtidos entre AMBEV, PETROBRAS e BOVESPA.

Os **objetivos do exercício** são transformar as séries de preços em log retornos, a análise gráfica dos log retornos, os testes de assimetria, curtose e normalidade dos log retornos, e tecer comentários sobre as séries de preços, os log retornos e as variabilidades ao longo das séries de log retornos.

Preste atenção porque as escalas das séries de preços podem ser diferentes. Além disso, os máximos e mínimos das séries de log retornos podem ser diferentes.

As séries de preços não estão exatamente alinhadas em termos de datas (número de observações), embora o período seja o mesmo. Contudo, não é necessário alinhar as datas!