

# **ECONOMETRIA FINANCEIRA**

**Ralph dos Santos Silva**

<http://www.ralphsilva.org/econometriafinanceira.html>

**Pós-graduação  
Especialização em Atuária**

Instituto de Matemática  
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

# Análise de séries temporais lineares e suas aplicações

Trataremos os retornos de um ativo como uma coleção de variáveis aleatórias através do tempo.

Por exemplo, o log retorno  $r_t$  de uma ação.

Neste caso, teremos uma série temporal  $\{r_t\}$ .

Falaremos sobre

- **Estacionariedade,**
- **Função de Autocorrelação,**
- **Modelagem,** e
- **Previsão.**

Estudaremos os modelos

- ◆ **Autoregressivos (AR),**
- ◆ **Médias Móveis (MA),** e
- ◆ **Autoregressivos e Médias Móveis (ARMA).**

# Estacionariedade

- Uma série temporal  $\{r_t\}$  é **estritamente estacionária** se a distribuição conjunta de  $(r_t, r_{t+1}, \dots, r_{t+k})$  for idêntica a  $(r_{t+h}, r_{t+1+h}, \dots, r_{t+k+h})$ , para todo  $t$ ,  $k$  e  $h$  inteiros positivos.

**A estacionariedade estrita requer que a distribuição conjunta seja invariante na mudança de intervalos de tempo.**

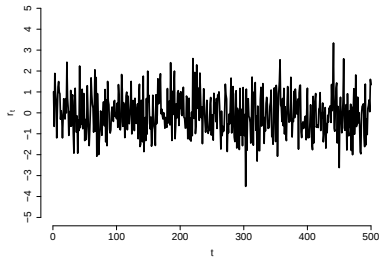
**Esta condição é difícil de ser verificada empiricamente.**

- Uma série temporal  $\{r_t\}$  é **fracamente estacionária** se a média e a variância de  $r_t$  forem invariantes no tempo e a covariância de  $r_t$  com  $r_{t+h}$  depender somente de  $h$ .

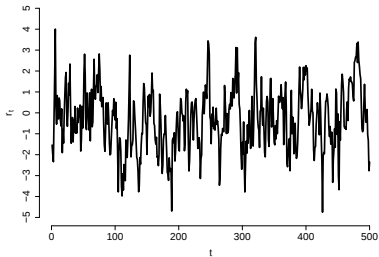
**Na estacionariedade fraca temos que**

$$E(r_t) = \mu, \quad \text{Var}(r_t) = \sigma^2 \quad \text{e} \quad \text{Cov}(r_t, r_{t+h}) = \gamma(h), \quad \text{para } h \geq 0.$$

Sob a hipótese de estacionariedade fraca, esperamos que uma série temporal (observada) esteja em torno de um valor constante e com uma variação constante.



(a) Modelo Ruído Branco com  $\sigma = 1$



(b) Modelo AR(1) com  $\phi = 0,7$  e  $\sigma = 1$

**Figura:** Exemplos empíricos de séries temporais fracamente estacionárias.

## Função de autocovariância

A função de autocovariância de defasagem  $h$  é definida por

$$\gamma(t, t+h) = \text{Cov}(r_t, r_{t+h}).$$

Sob estacionariedade fraca, temos que

$$\gamma(h) = \text{Cov}(r_t, r_{t+h}) = \text{Cov}(r_t, r_{t-h}) = \gamma(-h),$$

isto é,

$$\gamma(h) = \gamma(-h).$$

Além disso, temos que  $\gamma(0) = \text{Var}(r_t)$ .

Em várias aplicações, é comum a hipótese de que as séries de retornos de ativos sejam fracamente estacionárias.

## Função de autocorrelação

Considere uma série  $r_t$  fracamente estacionária.

Estamos interessados na correlação linear entre  $r_t$  e seus valores passados  $r_{t-h}$  (ou futuros  $r_{t+h}$ ).

O coeficiente de correlação entre  $r_t$  e  $r_{t-h}$  é chamado de autocorrelação de defasagem (lag)  $h$  de  $r_t$ . Definimos por

$$\rho(h) = \frac{\text{Cov}(r_t, r_{t-h})}{\sqrt{\text{Var}(r_t)\text{Var}(r_{t-h})}} = \frac{\text{Cov}(r_t, r_{t-h})}{\text{Var}(r_t)} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)},$$

pois  $\text{Var}(r_t) = \text{Var}(r_{t-h})$  pela hipótese de estacionariedade fraca.

Temos que

- $\rho(0) = 1$ ;
- $\rho(h) = \rho(-h)$  para todo  $h$ ; e
- $-1 \leq \rho(h) \leq 1$  para todo  $h$ .

Uma série fracamente estacionária  $r_t$  não é correlacionada serialmente se, e somente se,  $\rho(h) = 0$  para todo  $h > 0$ .

## Estimação da função de autocorrelação

Para uma dada amostra de retornos  $\{r_t\}_{t=1}^n$ , a autocorrelação (amostral) de defasagem 1 de  $r_t$  é

$$\hat{\rho}(1) = \frac{\sum_{t=2}^n (r_t - \bar{r})(r_{t-1} - \bar{r})}{\sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2}, \quad \text{em que} \quad \bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t.$$

Sob algumas condições gerais,  $\hat{\rho}(1)$  é um **estimador consistente** de  $\rho(1)$ .

Se  $\{r_t\}$  for uma sequência independente e identicamente distribuída (iid) e  $E(r_t^2) < \infty$ , então para  $n$  suficientemente grande

$$\hat{\rho}(1)\sqrt{n} \approx \mathcal{N}(0, 1).$$

Podemos testar

$$\begin{cases} H_0 : & \rho(1) = 0 \\ H_1 : & \rho(1) \neq 0. \end{cases}$$

## Estimação da função de autocorrelação: defasagem $h \geq 0$

A autocorrelação (amostral) de defasagem  $h$  de  $r_t$  é definida por

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\sum_{t=h+1}^n (r_t - \bar{r})(r_{t-h} - \bar{r})}{\sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2}, \quad \text{para } 0 \leq h \leq n-1.$$

Se  $\{r_t\}$  for uma sequência iid com  $E(r_t^2) < \infty$ , então para  $n$  suficientemente grande

$$\hat{\rho}(h)\sqrt{n} \approx \mathcal{N}(0, 1).$$

para todo inteiro positivo e fixo  $h$ .

Para  $h$  fixo, podemos testar

$$\begin{cases} H_0 : & \rho(h) = 0 \\ H_1 : & \rho(h) \neq 0. \end{cases}$$

## Função de autocorrelação amostral e propriedades

As estatísticas  $\hat{\rho}(1), \hat{\rho}(2), \dots$  conjuntamente definem a função de autocorrelação amostral (ACF) de  $r_t$ .

Em amostras finitas,  $\hat{\rho}(h)$  é um **estimador tendencioso** de  $\rho(h)$ .

A tendência é da ordem de  $1/n$ , o que pode ser significativo quando o tamanho amostral  $n$  é pequeno.

Na maioria das aplicações financeiras,  $n$  é relativamente grande tal que a tendenciosidade não é séria.

## Teste de Ljung e Box

Queremos testar

$$\begin{cases} H_0 : \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(m) = 0 \\ H_1 : \rho(j) \neq 0 \text{ para algum } j \in \{1, 2, \dots, m\}. \end{cases}$$

A estatística do teste de Ljung e Box é

$$Q(m) = n(n+2) \sum_{j=1}^m \frac{[\hat{\rho}(j)]^2}{n-j}.$$

Sob a hipótese que  $\{r_t\}$  é uma sequência iid com certas condições dos momentos,  $Q(m)$  tem distribuição assintótica qui-quadrado com  $m$  graus de liberdade.

Rejeitamos  $H_0$  se  $Q_{obs}(m) > \chi_{\alpha}^m$ , em que  $\chi_{\alpha}^m$  é o percentil  $100(1 - \alpha)$  da distribuição qui-quadrado com  $m$  graus de liberdade.

Na prática, geralmente escolhemos  $m \simeq \ln(n)$  ou vários valores para  $m$ .

Ver arquivo exemplo\_06.r

## Modelo ruído branco

Uma série temporal  $r_t$  é chamada de **ruído branco** se  $\{r_t\}$  for uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância constante e finita ( $\sigma^2$ ).

Se  $r_t$  tiver distribuição normal com média zero e variância  $\sigma^2$ , a série é chamada ruído branco gaussiano.

Para uma série ruído branco, todas as ACF são zero (para todas as defasagens).

Na prática, se todas ACF amostrais são zero (para todas as defasagens), então temos uma série ruído branco.

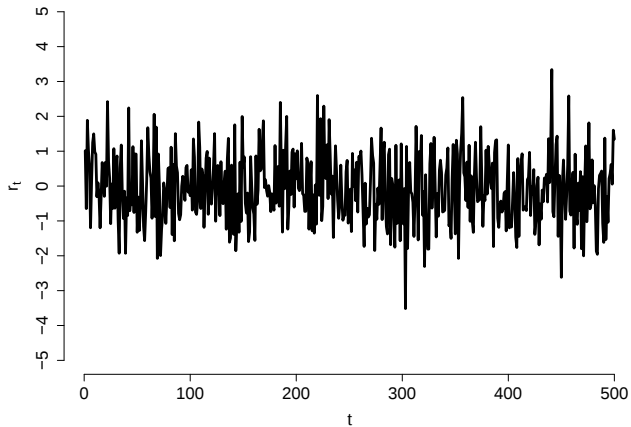


Figura: Exemplo empírico de uma série temporal **ruído branco** com  $\sigma = 1$ .

## Modelo autoregressivo

Um modelo autoregressivo de ordem 1, AR(1), é dado por

$$r_t = \mu + \phi(r_{t-1} - \mu) + a_t = \alpha + \phi r_{t-1} + a_t, \quad \text{com} \quad \alpha = \mu(1 - \phi),$$

em que  $a_t$  é um ruído branco com média zero e variância  $\sigma_a^2$ .

Em um modelo AR(1), temos que

$$E(r_t | r_{t-1}) = \mu + \phi(r_{t-1} - \mu) = \alpha + \phi r_{t-1} \quad \text{e} \quad \text{Var}(r_t | r_{t-1}) = \sigma_a^2.$$

Temos a propriedade markoviana, isto é, condicional em  $r_{t-1}$  o retorno  $r_t$  não é correlacionado com  $r_{t-i}$  para  $i > 1$ .

Além disso, temos que  $E(r_t) = \mu + \phi[E(r_{t-1}) - \mu]$ .

Sob a hipótese de estacionariedade fraca,

$$E(r_t) = E(r_{t-1}) = \mu.$$

**A média,  $E(r_t)$ , só existe se  $\phi \neq 1$ .**

Temos que  $E((r_{t-1} - \mu)a_t) = 0$  pela independência da série  $\{a_t\}$ .

Pela hipótese de estacionariedade ( $E(r_{t-1}) = \mu$ ), temos

$$\text{Cov}(r_{t-1}, a_t) = E((r_{t-1} - \mu)a_t) = 0.$$

Calculando a variância de  $r_t$ , obtemos

$$\text{Var}(r_t) = \phi^2 \text{Var}(r_{t-1}) + \sigma_a^2,$$

em que  $\sigma_a^2$  é a variância de  $a_t$ , e porque a correlação entre  $a_t$  e  $r_{t-1}$  é zero.

Sob a hipótese de estacionariedade,  $\text{Var}(r_t) = \text{Var}(r_{t-1})$  tal que

$$\text{Var}(r_t) = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi^2} \quad \text{com} \quad \phi^2 < 1.$$

A condição necessária e suficiente para o modelo AR(1) ser fracamente estacionário é  $|\phi| < 1$  (ou equivalentemente  $-1 < \phi < 1$ ).

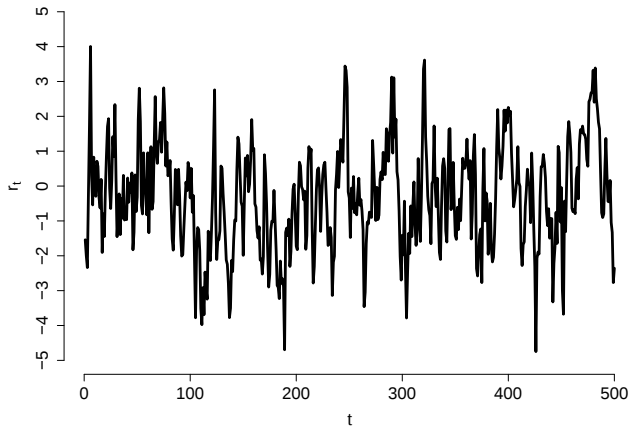


Figura: Exemplo empírico de uma série temporal **AR(1)** com  $\phi = 0,7$  e  $\sigma = 1$ .

## Função de autocorrelação de um AR(1)

Para o modelo AR(1),  $r_t = \mu + \phi(r_{t-1} - \mu)$ , temos que

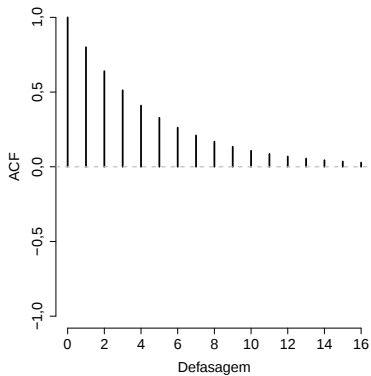
$$\text{Var}(r_t) = \gamma(0) = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi^2} \quad \text{e} \quad \gamma(h) = \phi\gamma(h-1) \quad \text{para} \quad h > 0.$$

A ACF de  $r_t$  satisfaz a  $\rho(h) = \phi\rho(h-1)$  para  $h \geq 0$ .

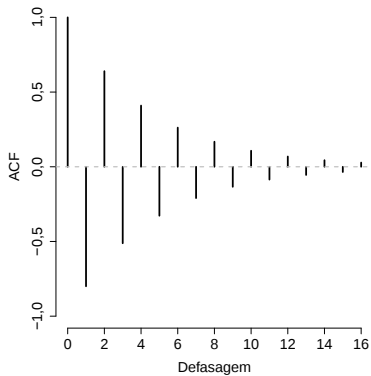
Como  $\rho(0) = 1$ , temos que

$$\rho(h) = \phi^h, \quad \text{para} \quad h \geq 0.$$

A ACF de um série AR(1) fracamente estacionária decai exponencialmente.



(a)  $\phi = 0,8$ .



(b)  $\phi = -0,8$

Figura: Função de autocorrelação do modelo AR(1).

## Modelo AR(2)

Um modelo AR(2) tem a forma

$$r_t = \mu + \phi_1(r_{t-1} - \mu) + \phi_2(r_{t-2} - \mu) + a_t = \alpha + \phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + a_t,$$

com  $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \phi_2)$ .

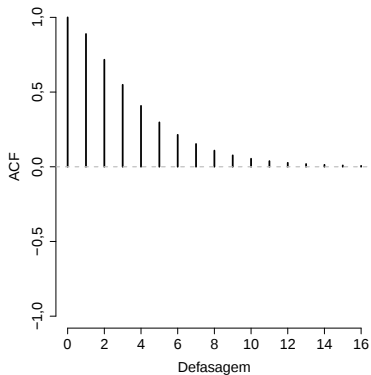
Sob a hipótese de estacionariedade,

$$E(r_t) = \mu = \frac{\alpha}{1 - \phi_1 - \phi_2}, \quad \text{para } \phi_1 + \phi_2 \neq 1.$$

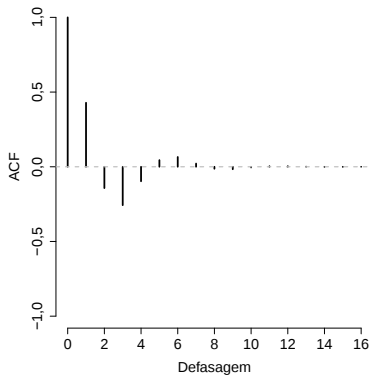
O cálculo da função de autocorrelação resulta em

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}, & \text{se } h = 1; \\ \phi_1 \rho(h-1) + \phi_2 \rho(h-2), & \text{para } h \geq 2. \end{cases}$$

O modelo AR(2) é fracamente estacionário se  $\phi_1 + \phi_2 < 1$ ,  $\phi_2 - \phi_1 < 1$  e  $|\phi_2| < 1$ .

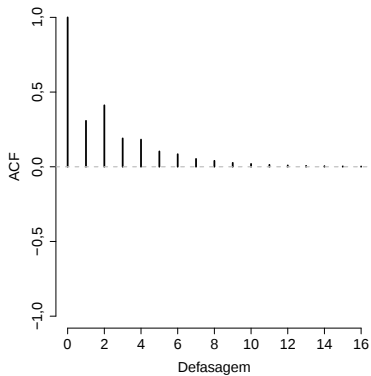


(a)  $\phi_1 = 1,2$  e  $\phi_2 = -0,35$

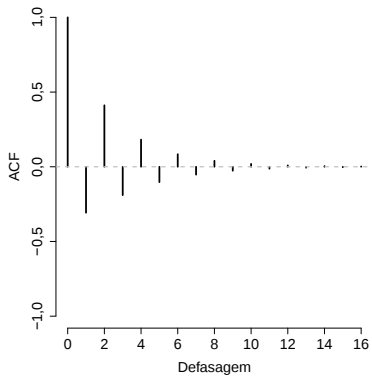


(b)  $\phi_1 = 0,6$  e  $\phi_2 = -0,4$

Figura: Função de autocorrelação do modelo AR(2).



(a)  $\phi_1 = 0,2$  e  $\phi_2 = 0,35$



(b)  $\phi_1 = -0,2$  e  $\phi_2 = 0,35$

Figura: Função de autocorrelação do modelo AR(2).

## Modelo AR(p)

Um modelo AR(p) tem a forma

$$\begin{aligned}r_t &= \mu + \phi_1(r_{t-1} - \mu) + \phi_2(r_{t-2} - \mu) + \cdots + \phi_p(r_{t-p} - \mu) + a_t \\ &= \alpha + \phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + \cdots + \phi_p r_{t-p} + a_t,\end{aligned}$$

com  $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p)$ .

Sob a hipótese de estacionariedade,

$$E(r_t) = \mu = \frac{\alpha}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p}, \quad \text{para } \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p \neq 1.$$

**Um gráfico da ACF de um modelo AR(p) estacionário pode mostrar padrões senos e cossenos, e decaimento exponencial.**

## Função de autocorrelação parcial

Considere os seguintes modelos autoregressivos:

$$r_t = \alpha_{0,1} + \phi_{1,1}r_{t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$r_t = \alpha_{0,2} + \phi_{1,2}r_{t-1} + \phi_{2,2}r_{t-2} + \varepsilon_{2t}$$

$$r_t = \alpha_{0,3} + \phi_{1,3}r_{t-1} + \phi_{2,3}r_{t-2} + \phi_{3,3}r_{t-3} + \varepsilon_{3t}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

em que  $\alpha_{0,j}$ ,  $\phi_{i,j}$  e  $\varepsilon_{jt}$  são o termo constante, o coeficiente de  $r_{t-i}$  e o termo de erro de um modelo AR( $j$ ), respectivamente.

Podemos estimar tudo por mínimos quadrados (múltiplo) e aplicar um teste  $F$  parcial.

A estimativa de  $\hat{\phi}_{1,1}$  da primeira equação é chamada de PACF amostral de defasagem 1 de  $r_t$ .

A estimativa de  $\hat{\phi}_{2,2}$  da segunda equação é chamada de PACF amostral de defasagem 2 de  $r_t$ . E assim por diante.

A PACF de defasagem 2  $\hat{\phi}_{2,2}$  mostra a contribuição de  $r_{t-2}$  adicionada a  $r_t$  sobre o modelo AR(1)  $r_t = \alpha + \phi_1 r_{t-1} + e_{1t}$ .

A PACF de defasagem 3  $\hat{\phi}_{3,3}$  mostra a contribuição de  $r_{t-3}$  adicionada a  $r_t$  sobre o modelo AR(2)  $r_t = \alpha + \phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + e_{2t}$ . E assim por diante.

Portanto, para um modelo AR( $p$ ), a PACF amostral de defasagem  $p$  não deve ser zero.

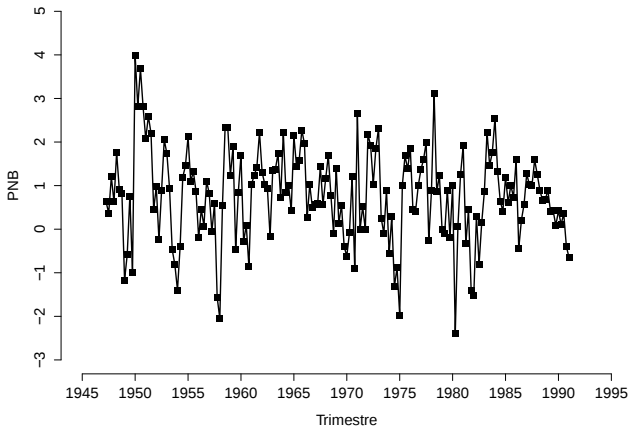
Mas  $\hat{\phi}_{j,j}$  deve estar perto de zero para todo  $j > p$ .

Utilizamos esta propriedade para determinar a ordem  $p$ .

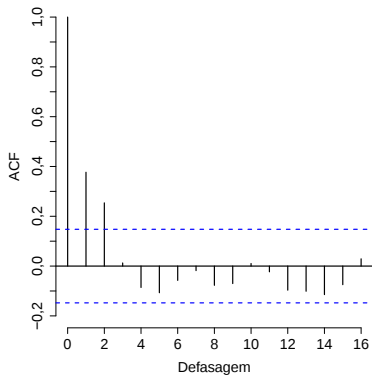
Para um modelo AR( $p$ ) gaussiano estacionário, pode ser mostrado que a PACF amostral tem as seguintes propriedades:

- $\hat{\phi}_{p,p}$  converge para  $\phi_p$  quando o tamanho da amostra  $n$  tende ao infinito.
- $\hat{\phi}_{k,k}$  converge para zero para todo  $k > p$ .
- A variância assintótica de  $\hat{\phi}_{k,k}$  é  $1/n$  para  $k > p$ .

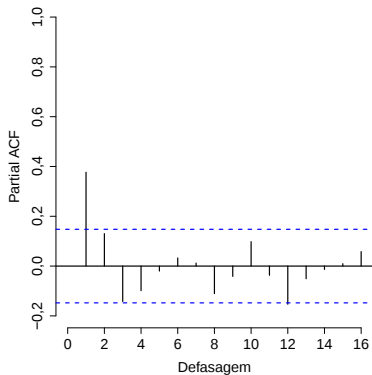
## Exemplo (Ver arquivo exemplo\_07.r)



**Figura:** Razão de crescimento do PNB real trimestral americano entre 1947-2 e 1991-1. (Os dados estão sazonalmente ajustados e em porcentagens.)



(a) ACF



(b) PACF

Figura: ACF e PACF amostrais para o PNB real trimestral americano entre 1947-2 e 1991-1.

## Critérios de informação baseados na função de verossimilhança

O critério de informação de Akaike é definido por

$$AIC = -2 \ln(\text{verossimilhança}) + 2(\text{número de parâmetros}).$$

em que a função de verossimilhança é avaliada na estimativa de máxima verossimilhança.

O critério de informação de bayesiana (Schwarz) é definido por

$$BIC = -2 \ln(\text{verossimilhança}) + \ln(n)(\text{número de parâmetros}).$$

Em ambos os critérios, o primeiro termo mede a qualidade de ajuste do modelo e o segundo termo penaliza pelo número de parâmetros.

O BIC tende a selecionar um modelo  $AR(p)$  de menor ordem comparado ao AIC para um tamanho de amostra moderado.

Ajustamos os modelos  $AR(p)$ , para  $p = \{0, 1, 2, \dots, P\}$ , e selecionamos o modelo com menor o AIC (ou BIC).

Ver arquivo [exemplo\\_07.r](#)

## Verificação do modelo

A série de resíduos deve se comportar como um ruído branco.

A ACF e o teste de Ljung-Box podem ser usados para verificar a hipótese de ruído branco (testes para correlação serial nula).

Para um modelo  $AR(p)$ , a estatística  $Q(m)$  de Ljung-Box tem distribuição assintótica qui-quadrado com  $m - p$  graus de liberdade.

Se julgarmos um modelo como inadequado, então devemos refiná-lo.

Por exemplo, se alguns coeficientes não são significativamente diferentes de zero, então o modelo deve ser simplificado (removendo estes parâmetros não significativos).

Se a ACF da série residual exibir evidências de correlação serial, então o modelo deve ser estendido para cuidar destas correlações.

Para verificar a hipótese de normalidade podemos utilizar o teste de Jarque e Bera (após verificar a hipótese de autocorrelações nulas).

Ver arquivo [exemplo\\_07.r](#)

# Previsão

Suponha que estejamos no tempo  $n$  e interessados na previsão  $r_{n+k}$  para  $k \geq 1$  em que

- $n$  é a origem de previsão; e
- $k$  é o horizonte de previsão.

Chamamos  $\hat{r}_n(k)$  de previsão  $k$  passos à frente de  $r_t$  na origem de previsão  $n$ .

## Previsão 1 passo à frente

Do modelo  $AR(p)$ , temos que

$$r_{n+1} = \alpha + \phi_1 r_n + \cdots + \phi_p r_{n+1-p} + a_{n+1}.$$

A previsão pontual de  $r_{n+1}$  é dada por

$$\hat{r}_n(1) = E(r_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \alpha + \sum_{j=1}^p \phi_j r_{n+1-j}$$

e o erro de previsão associado é

$$e_n(1) = r_{n+1} - \hat{r}_n(1) = a_{n+1}.$$

A varância do erro de previsão 1 passo à frente é

$$\text{Var}(e_n(1)) = \text{Var}(a_{n+1}) = \sigma_a^2.$$

Se  $a_t$  é normalmente distribuído, então um intervalo de previsão de um passo à frente de 95% de  $r_{n+1}$  é

$$\hat{r}_n(1) \pm 1,96 \times \sigma_a.$$

Na prática, os parâmetros estimados são geralmente usados para calcular previsões pontual e intervalar.

## Previsão 2 passos à frente

Do modelo  $AR(p)$ , temos

$$r_{n+2} = \alpha + \phi_1 r_{n+1} + \cdots + \phi_p r_{n+2-p} + a_{n+2}.$$

Tomando a esperança condicional, temos

$$\hat{r}_n(2) = E(r_{n+2} | \mathcal{F}_n) = \alpha + \phi_1 \hat{r}_n(1) + \phi_2 r_n + \cdots + \phi_p r_{n+2-p}$$

e o erro de previsão dado por

$$e_n(2) = r_{n+2} - \hat{r}_n(2) = \phi_1 [r_{n+1} - \hat{r}_n(1)] + a_{n+2} = a_{n+2} + \phi_1 a_{n+1}.$$

A variância do erro de previsão é

$$\text{Var}(e_n(2)) = (1 + \phi_1^2) \sigma_a^2.$$

Note que  $\text{Var}(e_n(2)) \geq \text{Var}(e_n(1))$ . Mais incerteza sobre a previsão de  $r_{n+2}$  do que de  $r_{n+1}$  na origem de previsão  $n$ .

## Previsão $k$ passos à frente

Temos que

$$r_{n+k} = \alpha + \phi_1 r_{n+k-1} + \cdots + \phi_p r_{n+k-p} + a_{n+k}.$$

A previsão é dada por

$$\hat{r}_n(k) = \alpha + \sum_{j=1}^p \phi_j \hat{r}_n(k-j),$$

em que  $\hat{r}_n(j) = r_{n+j}$  se  $j \leq 0$ .

O erro de previsão  $k$  passos à frente é dado por

$$e_n(k) = r_{n+k} - \hat{r}_n(k).$$

Pode ser mostrado que para um modelo  $AR(p)$  estacionário,  $\hat{r}_n(k)$  converge para  $E(r_t)$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

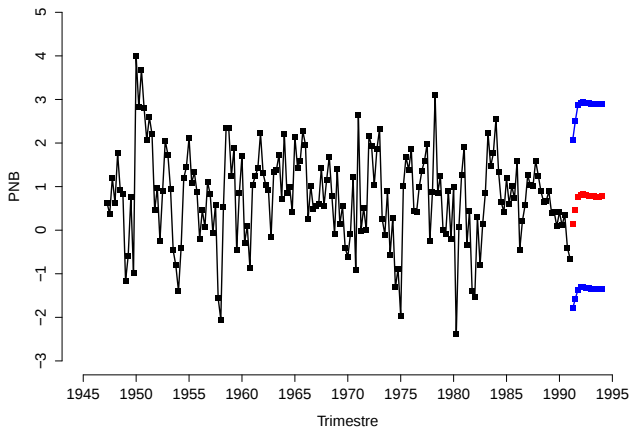


Figura: Razão de crescimento do PNB real trimestral americano entre 1947-2 e 1991-1. (Os dados estão sazonalmente ajustados e em percentagens.)

## Modelos médias móveis

O modelo de **médias móveis de ordem 1**, ou simplesmente **MA(1)**, é dado por

$$r_t = \mu + \theta a_{t-1} + a_t.$$

O modelo MA( $q$ ) é dado por

$$r_t = \mu + \theta_1 a_{t-1} + \cdots + \theta_q a_{t-q} + a_t.$$

Modelos de médias móveis são sempre estacionários porque são combinações lineares de uma sequência de ruídos brancos.

Para um MA( $q$ ), temos

$$\begin{aligned} E(r_t) &= \mu \\ \text{Var}(r_t) &= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2) \sigma_a^2. \end{aligned}$$

## Modelos médias móveis: ACF

A função de autocorrelação (ACF) para um MA(1) é dada por

$$\rho(0) = 1, \quad \rho(1) = \frac{\theta}{1 + \theta^2}, \quad \text{e} \quad \rho(h) = 0, \quad \text{para} \quad h > 1.$$

A ACF para um MA(2) é dada por

$$\rho(0) = 1, \quad \rho(1) = \frac{\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, \quad \rho(2) = \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, \quad \text{e}$$
$$\rho(h) = 0, \quad \text{para} \quad h > 2.$$

A ACF para um MA( $q$ ) na defasagem  $h$ ,  $\rho(h)$ , não é zero para  $h \leq q$ , e é zero para  $h > q$ .

Podemos utilizar o fato acima para identificar um modelo MA( $q$ ) através de sua ACF.

A estimação dos modelos MA é, em geral, feita pelo método da máxima verossimilhança. **(Disponível no R através da função `arima(0,0,q)`.)**

## Modelos ARMA

Um modelo **autoregressivo e médias móveis (ARMA)** pode ser melhor que um AR simples ou um MA simples devido ao número reduzido de parâmetros necessários para se captar a estrutura de dependência dos dados.

O modelo ARMA(1,1) é dado por

$$r_t = \mu + \phi(r_{t-1} - \mu) + \theta a_{t-1} + a_t = \alpha + \phi r_{t-1} + \theta a_{t-1} + a_t,$$

em que  $a_t$  é um ruído branco e  $\phi \neq \theta$ .

O modelo ARMA( $p, q$ ) é dado por

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \phi_1(r_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p(r_{t-p} - \mu) + \theta_1 a_{t-1} + \cdots + \theta_q a_{t-q} + a_t \\ &= \alpha + \phi_1 r_{t-1} + \cdots + \phi_p r_{t-p} + \theta_1 a_{t-1} + \cdots + \theta_q a_{t-q} + a_t. \end{aligned}$$

A estimação do modelo ARMA( $p, q$ ) é feita pelo método da máxima verossimilhança. **(Disponível no R através da função `arima(p, 0, q)`.)**

Ver arquivo `exemplo_08.r`

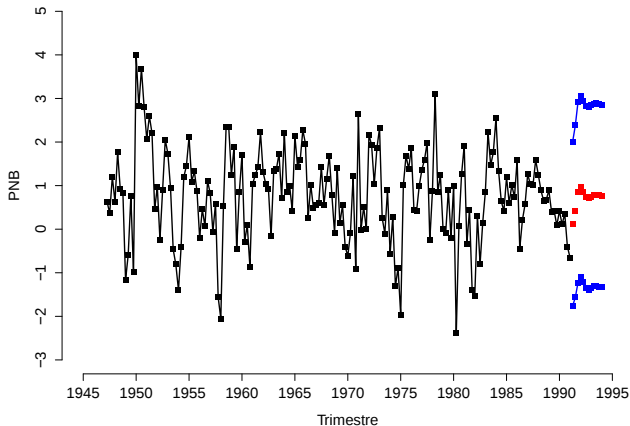


Figura: Razão de crescimento do PNB real trimestral americano entre 1947-2 e 1991-1. (Os dados estão sazonalmente ajustados e em percentagens.)

## Trabalho II

Analise os seguintes conjuntos de dados:

1. Log retornos semanais de um fundo de investimento SAFRA; e
2. Log retornos semanais de um fundo de investimento UNIBANCO.

Os dados estão disponíveis no arquivo [retornos\\_fundos.csv](#) e correspondem as semanas de 02/01/2004 a 29/08/2008 (total de 244 semanas).

Ver arquivo [exemplo\\_09.r](#)

- As séries de log retornos podem ser consideradas como estacionárias?
- Calcule as ACFs e PACFs amostrais dos log retornos dos fundos. Analise os graus de dependências através destes gráficos.
- Para cada série, ajuste modelos ARMA até uma ordem máxima  $P$  e  $Q$ .
- Escolha o melhor modelo segundo o critério AIC (leve também em consideração a significância dos parâmetros).
- Após escolher o melhor ajuste, faça as análises pertinentes das hipóteses do modelo (análise de resíduos e testes).
- Faça a previsão 4 passos à frente utilizando o melhor modelo ajustado.