

ECONOMETRIA FINANCEIRA

Ralph dos Santos Silva

<http://www.ralphsilva.org/econometriafinanceira.html>

Pós-graduação
Especialização em Atuária

Instituto de Matemática
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Distribuição normal multivariada

Definição

A função de densidade de probabilidade da **normal multivariada**, com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$, é dada por

$$f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\},$$

com $|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ uma matriz $p \times p$ (simétrica e positiva definida, isto é, $\mathbf{c}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{c} > 0$ para todo $\mathbf{c}$ não nulo).

Temos que $E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}$ e $\text{Var}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\Sigma}$.

Notação: $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $m \times p$ e $\mathbf{b}$ um vetor $m \times 1$. Então,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b} \sim \mathcal{N}_m(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^\top).$$

Combinação linear de variáveis aleatórias normais tem distribuição normal.

Distribuição normal multivariada: marginais e condicionais

Seja $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ tal que

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}, \text{ com dimensões } \begin{bmatrix} q \times 1 \\ (p-q) \times 1 \end{bmatrix}, \text{ e}$$
$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}, \text{ com dimensões } \begin{bmatrix} q \times q & q \times (p-q) \\ (p-q) \times q & (p-q) \times (p-q) \end{bmatrix}.$$

em que $p > q \geq 1$. Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &\sim \mathcal{N}_q(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11}), \\ \mathbf{X}_2 &\sim \mathcal{N}_{(p-q)}(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22}), \text{ e} \\ (\mathbf{X}_1 | \mathbf{X}_2 = \boldsymbol{\xi}) &\sim \mathcal{N}_q(\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}), \end{aligned}$$

em que

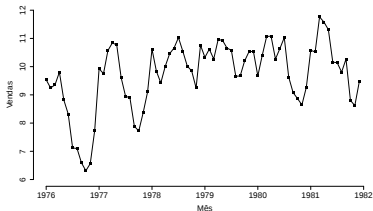
$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\mu}} &= \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu}_2) \\ \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} &= \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{21}. \end{aligned}$$

Ver arquivo exemplo_10.r

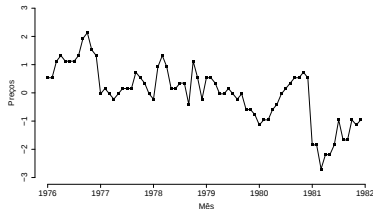
Exemplo

Análise da série de vendas mensais de um certo tipo doce no Reino Unido de janeiro de 1976 a dezembro de 1981. Se possível, utilizar a série de preços deste doce como variável explicativa.

Tendência? Sazonalidade? Variáveis causais (explicativas)?



(a) Vendas



(b) Preços

Figura: Vendas e logaritmo dos preços mensais de um certo tipo doce no Reino Unido de janeiro de 1976 a dezembro de 1981.

Introdução

Os **modelos estáticos** têm uma descrição fixa (através de parâmetros fixos) ao longo das unidades de observação.

- Análise de regressão,

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

- Modelos ARMA,

$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Em séries temporais, essa hipótese muitas vezes é violada:

as estruturas mudam com a passagem do tempo.

Séries temporais ligados às atividades humanas são alvos de mudanças:

- Abruptas - hecatombes, novas leis;
- Graduais.

Nesta aula, faz-se uma introdução aos **modelos dinâmicos**.

- ◆ **A descrição (os parâmetros) muda(m) com a passagem do tempo.**
- ◆ Os modelos dinâmicos nos permitem a modelagem da tendência (média) e variância (volatilidade).
- ◆ Os modelos dinâmicos incluem como casos particulares os modelos estáticos.

A passagem do tempo traz observações e aumenta o nosso conhecimento.

Em modelos dinâmicos temos também perda de informação devido à passagem do tempo.

Por exemplo, o nível de vendas mês passado é mais relevante hoje que o nível de vendas em janeiro passado.

Abordagem bayesiana

Estamos interessados na distribuição a posteriori do vetor de parâmetros θ condicional aos dados $\mathbf{y}$:

$$f(\theta|\mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y}|\theta)f(\theta)}{f(\mathbf{y})} \propto f(\mathbf{y}|\theta)f(\theta),$$

em que $f(\mathbf{y}|\theta) = L(\theta)$ é a função de verossimilhança, e $f(\theta)$ é a distribuição a priori.

Um **modelo** é uma representação de uma realidade; será tão adequado quanto à sua capacidade de alcançar os objetivos a que ele se destina.

Previsão é uma afirmação sobre um futuro incerto.

A **incerteza** será sempre representada através de probabilidade. Portanto, a previsão será sempre formulada em termos de probabilidade condicionada ao nosso estado de conhecimento. Se ele muda, nossa previsão mudará.

Nosso conhecimento provém de duas fontes:

- A série histórica ou dados;
- Outros conhecimentos (subjetivos).

Exemplos: entrada em vigor de leis, falência de competidor.

Ambas as fontes são importantes, podem e devem ser utilizadas.

A abordagem bayesiana incorpora esses elementos coerentemente.

Aplicando à previsão, significa que o modelo padrão é posto para funcionar.

Se acontecimentos não rotineiros intervêm, o modelo os incorpora:

- Preparando para mudança; ou
- Alterando o que for necessário.

Exemplo: se o competidor falirá, precisa usar seu conhecimento sobre a divisão do mercado para formular a mudança que ele espera que aconteça.

O modelo de regressão (linear múltiplo)

Uma variável resposta y é função de um conjunto de variáveis explicativas $x_1, \dots, x_p$ através da relação

$$y = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \dots + \theta_p x_p + \varepsilon.$$

Em muitos casos, assume-se que $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

A equação acima pode ser compactamente escrita como:

$$y = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\theta} + \varepsilon,$$

em que

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_p \end{pmatrix}.$$

A natureza das variáveis explicativas ou regressoras é bastante ampla.

Pode-se utilizar qualquer variável quantificável.

Os coeficientes de regressão $\theta_1, \dots, \theta_p$ informam sobre a influência que os regressores têm sobre a resposta y .

Na prática, seus valores são desconhecidos e estimados a partir de uma coleção de observações feitas sobre o modelo.

Observamos respostas $y_1, \dots, y_n$ com seus respectivos regressores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. Simbolicamente, temos que

$$y_t = \mathbf{x}_t^\top \boldsymbol{\theta} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n,$$

em que $\mathbf{x}_t^\top = (x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tp})$.

Modelos dinâmicos

Em modelos dinâmicos os parâmetros mudam com o passar do tempo.

O modelo de regressão é estendido para

$$y_t = \mathbf{x}_t^\top \boldsymbol{\theta}_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

Note a **indexação de $\boldsymbol{\theta}$** .

Esta formulação cria uma profusão de parâmetros a serem estimados.

O modelo necessita de mais informação. Essa informação vem do fato que os parâmetros sucessivos estão intimamente relacionados.

Por exemplo, um parâmetro é igual ao seu antecessor mais uma pequena perturbação causada pelas mudanças às quais o sistema está sujeito.

Se o sistema é estático, como no modelo de regressão, temos que

$$\boldsymbol{\theta}_t = \boldsymbol{\theta}_{t-1} = \boldsymbol{\theta}.$$

Em modelos dinâmicos, admitimos a forma mais geral dada por

$$\theta_t = \mathbf{G}_t \theta_{t-1} + \mathbf{w}_t,$$

em que

- $\mathbf{G}_t$ contém valores conhecidos (ou parâmetros fixos); e
- $\mathbf{w}_t$ é uma perturbação aleatória.

A equação acima é conhecida como **equação do sistema**.

A **matriz de evolução** $\mathbf{G}_t$ controla a parte determinística da evolução do sistema e estabelece a propagação do sistema ao longo do tempo.

A **perturbação** $\mathbf{w}_t$ é responsável pela introdução de incertezas devidas à passagem do tempo e consequente perda de informação.

Note que se $\mathbf{G}_t = \mathbf{I}$ e $\mathbf{w}_t = \mathbf{0}$, o modelo se reduz ao caso estático.

Exemplo

Suponha que uma série de **vendas** possa ser explicada pela respectiva série de **preços** através da seguinte relação:

$$vendas_t = \mu_t + \beta_t \text{ preço}_t + v_t$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + w_{1t}$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + w_{2t}.$$

As **vendas** são explicadas pelo **preço** em uma regressão dinâmica.

A maior (ou menor) estabilidade dessa relação será controlada pela magnitude dos incrementos (erros) w_{1t} e w_{2t} .

Modelo linear dinâmico

O **modelo linear dinâmico** pode ser definido como

- **Equação das observações:**

$$y_t = \mathbf{F}_t^\top \boldsymbol{\theta}_t + v_t, \quad v_t \sim \mathcal{N}(0, V_t)$$

- **Equação do sistema:**

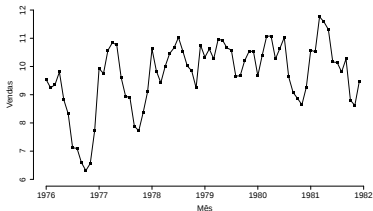
$$\boldsymbol{\theta}_t = \mathbf{G}_t \boldsymbol{\theta}_{t-1} + \mathbf{w}_t, \quad \mathbf{w}_t \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{W}_t)$$

No exemplo anterior, $y_t = \text{venda}_t$, $\mathbf{F}_t^\top = (1, \text{preço}_t)$,

$$\boldsymbol{\theta}_t = \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_t = \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{w}_t = \begin{pmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \end{pmatrix}$$

Exemplo

Analisaremos a série de vendas mensais de um certo tipo doce no Reino Unido de janeiro de 1976 a dezembro de 1981. Também utilizaremos a série de preços, na escala do logaritmo, deste doce como variável explicativa.



(a) Vendas



(b) Preços

Figura: Vendas e logaritmo dos preços mensais de um certo tipo doce no Reino Unido de janeiro de 1976 a dezembro de 1981.

Ver arquivo [exemplo_11.r](#)

Modelo de tendência estável

É composto apenas de um nível que varia segundo um passeio aleatório.

O modelo de tendência estável é dado por

$$\begin{aligned} \text{vendas}_t &= \mu_t + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, V_t) \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + w_t, & w_t &\sim \mathcal{N}(0, W_t). \end{aligned}$$

O nível permanece localmente constante, mas varia quando se considera longos períodos de tempo.

O modelo de tendência estável é obtido ao particularizar o modelo dinâmico com $\mathbf{F}_t = 1$ e $\mathbf{G}_t = 1$.

Para a série temporal de vendas de doce faremos $V_t = V$ e $W_t = W$ para todo t (homocedasticidade; variâncias constantes ao longo do tempo).

Observações importantes

Consideraremos a análise somente após observar toda a série. Isto se chama **análise suavizada**.

É possível considerar a análise sequencial no tempo.

Para uma subclasse dos modelos dinâmicos (lineares e com erros normais) é possível aplicar o **filtro de Kalman** na análise sequencial.

O filtro de Kalman também pode ser empregado nestes modelos para inferência via máxima verossimilhança.

Nesta aula, consideraremos somente a análise bayesiana.

Descreveremos o modelo e a distribuição priori dos parâmetros.

Utilizaremos o programa **OpenBUGS** para fazer as análises.

Calcularemos o **Critério de Informação do Desvio (DIC)** para comparar modelos.

Ver arquivo [doce_modelo_1.odc](#)

Operações básicas no OpenBUGS

1. *Model*→ *Specification...*
2. *check model*
Verificar por *model is syntactically correct*
3. *load data*
Verificar por *data loaded*
4. *compile*
Verificar por *model compiled*
5. *load inits* ou *gen inits*
Verificar por *initial values generated, model initialized*
6. *Inference*→ *Samples...*
7. *Model*→ *Update...* (até a convergência da cadeia)
8. *Inference*→ *DIC...*
9. *Model*→ *Update...* (para obter a amostra da posteriori)
10. *Inference*→ *Samples...* (para a análise dos valores gerados)
11. *Inference*→ *DIC...* (para conferir o valor do DIC)

Modelo de tendência linear

A tendência linear é quantificada através de um parâmetro adicional.

O modelo de tendência linear é dado por

$$\begin{aligned} \text{vendas}_t &= \mu_t + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, V_t) \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + w_{1t} \\ \beta_t &= \beta_{t-1} + w_{2t}, \end{aligned}$$

em que $\mathbf{w}_t = (w_{1t}, w_{2t})^\top \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{W}_t)$.

Esse modelo é obtido com $\mathbf{F}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{G}_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

O nível permanece localmente linear, mas a forma da reta pode variar com o tempo.

Para a série de vendas de doce faremos $V_t = V$ e $\mathbf{W}_t = \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ para todo t (independência e variâncias constantes ao longo do tempo).

Ver arquivo [doce_modelo_2.odc](#)

Modelo de regressão dinâmica

Introduzimos variáveis explicativas com coeficientes variando no tempo.

O modelo de regressão dinâmica é dado por

$$vendas_t = \mu_t + \beta_t \text{preço}_t + v_t, \quad v_t \sim \mathcal{N}(0, V_t)$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + w_{1t}$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + w_{2t},$$

em que $\mathbf{w}_t = (w_{1t}, w_{2t})^\top \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{W}_t)$.

Esse modelo é obtido com $\boldsymbol{\theta}_t = \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix}$, $\mathbf{F}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ \text{preço}_t \end{pmatrix}$ e $\mathbf{G}_t = \mathbf{I}$.

Para a série de vendas de doce faremos $V_t = V$ e $\mathbf{W}_t = \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$
para todo t (independência e variâncias constantes ao longo do tempo).

Ver arquivo doce_modelo_3.odc

Previsão

Estamos interessados na previsão de horizonte h na origem t , y_{t+h} .

Consideraremos o conjunto $\{y_{t+1}, y_{t+2}, \dots, y_{t+h}\}$ como não observados (dados faltantes).

Do ponto de vista bayesiano, estimaremos estas quantidades condicional aos dados.

Este procedimento é facilmente implementado no **OpenBUGS**.

Em geral, tomamos a média a posterior de y_{t+h} como a previsão (pontual).

Temos também o intervalo de previsão (intervalo de credibilidade) de y_{t+h} .

Ver arquivos [doce_modelo_1_b.odc](#) e [doce_modelo_2_b.odc](#)

Modelo de efeitos sazonais

Considere o modelo $y_t = \gamma_t + v_t$, em que γ_t é a componente de sazonalidade.

Seja s o número de períodos nos dados. Por exemplo,

- $s = 12$ para dados mensais;
- $s = 4$ para dados trimestrais; e
- $s = 7$ para dados diários.

Uma forma de modelar efeitos sazonais é através de variáveis binárias.

A soma dos efeitos do período devem ser igual a zero,

$$\gamma_t = -\sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j}.$$

Para permitir que o padrão mude ao longo do tempo, introduzimos um novo termo de erro,

$$\gamma_t = -\sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} + w_t, \quad w_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

O valor esperado da soma dos efeitos sazonais é zero.

Superposição de modelos

Estamos interessados em uma forma geral para estruturar e acomodar as várias componentes intervenientes em um modelo dinâmico. Por exemplo, variáveis causais e sazonalidade.

Muitas séries temporais exibem um comportamento bastante complexo.

Ao identificarmos as características mais marcantes, estamos caminhando na direção de formular um modelo.

A série ilustrada na figura a seguir é um exemplo típico.

A tendência global parece ser de uma **variação suave do nível**.

Se agora nos concentramos na variação em torno desse nível, podemos detectar um **comportamento cíclico**.

Essa inspeção permitiu identificar duas componentes do modelo: uma componente para a **tendência** e outro para a **sazonalidade**.

Exemplo

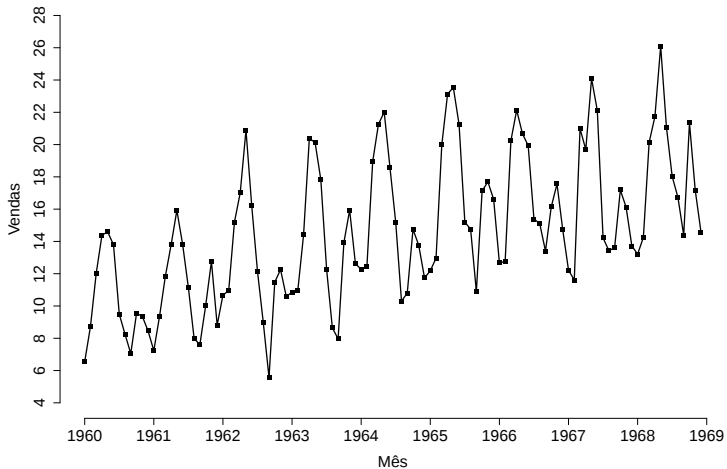


Figura: Venda de carros nos EUA de janeiro de 1960 a dezembro de 1968.

Ver arquivo exemplo_12.r

A estrutura dos **modelos dinâmicos** é apropriada para isto, pois permite que as componentes sejam modeladas separadamente e depois integradas em um modelo.

Em um exemplo com duas componentes - **tendência e sazonalidade** - estruturamos a equação das observações com dois termos:

$$y_t = y_{Nt} + y_{St} + v_t.$$

Cada um dos termos é descrito na seguinte dinâmica:

$$\begin{aligned} y_{Nt} &= \mathbf{F}_{Nt}^\top \boldsymbol{\theta}_{Nt} & \text{e} & & y_{St} &= \mathbf{F}_{St}^\top \boldsymbol{\theta}_{St} \\ \boldsymbol{\theta}_{Nt} &= \mathbf{G}_{Nt} \boldsymbol{\theta}_{Nt-1} + \mathbf{w}_{Nt} & & & \boldsymbol{\theta}_{St} &= \mathbf{G}_{St} \boldsymbol{\theta}_{St-1} + \mathbf{w}_{St}. \end{aligned}$$

Se juntarmos esses termos, obtemos a **equação das observações**

$$y_t = \mathbf{F}_t^\top \boldsymbol{\theta}_t + v_t$$

em que

$$\mathbf{F}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{Nt} \\ \mathbf{F}_{St} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\theta}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_{Nt} \\ \boldsymbol{\theta}_{St} \end{pmatrix}.$$

Similarmente, a **equação do sistema (integrado)** fica

$$\theta_t = \mathbf{G}_t \theta_{t-1} + \mathbf{w}_t, \quad \mathbf{w}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{W}_t)$$

em que

$$\mathbf{G}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{Nt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{St} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{W}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{Nt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_{St} \end{pmatrix}.$$

Modelos com mais componentes são construídos da mesma forma: cada termo contribui para a equação das observações e com um bloco de parâmetros para a equação do sistema.

Exemplo (superposição: tendência linear e sazonalidade)

Analisaremos a série de venda de carros nos EUA.

Note a tendência linear e a sazonalidade.

Ver arquivo [carro_modelo_1.odc](#)

Trabalho III

Analise a série mensal de vendas de vinho na Austrália de janeiro de 1980 a dezembro de 1991. Dados disponíveis no arquivo **vinho.txt**.

Ver arquivo **exemplo_13.r**

Note a presença de tendência linear, sazonalidade e **variância crescente ao longo do tempo**. Utilize a transformada logarítmica. Isto ajudará a resolver o problema da heterocedasticidade.

Ajuste um modelo de tendência linear e sazonalidade. Note que a sazonalidade é de 12 meses ($s = 12$).

Ver arquivo **vinho_modelo_1.odc**

Os **objetivos do exercício** são utilizar o **OpenBUGS** para fazer as análises, gerar duas ou três cadeias em paralelo para obter uma amostra da distribuição a posteriori, analisar a partir de que iteração as cadeias exibem indícios de convergência, analisar as autocorrelações dos valores gerados das cadeias, escolher um distanciamento (*thin*) entre os valores gerados, obter um resumo da distribuição a posteriori e analisar os resultados.