

ECONOMETRIA FINANCEIRA

Ralph dos Santos Silva

<http://www.ralphsilva.org/econometriafinanceira.html>

**Pós-graduação
Especialização em Atuária**

Instituto de Matemática
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Motivação

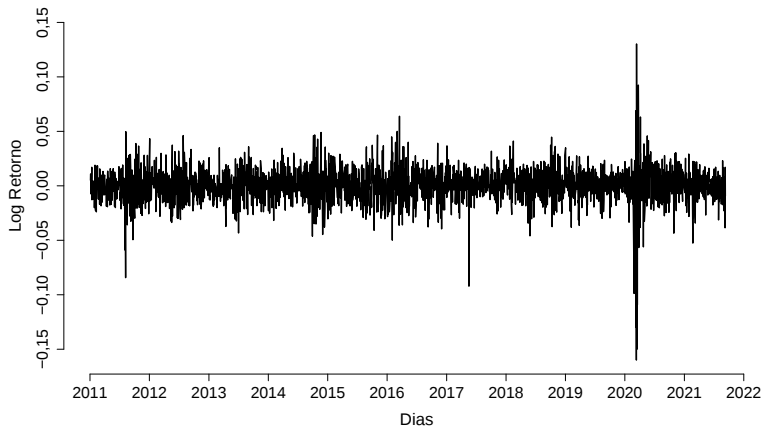


Figura: Log retornos diários do IBOVESPA de 4 de janeiro de 2011 até 10 de setembro de 2021.

Ver arquivo exemplo_14.r

Modelos condicionalmente heterocedásticos

O objetivo é a modelagem da volatilidade do retorno de um ativo.

A volatilidade é um fator importante na negociação de opções (por exemplo, fórmula de Black-Scholes).

A volatilidade tem efeito sobre cálculo do valor em risco ($V@R$).

A volatilidade significa a variância (ou desvio padrão) condicional do retorno de um ativo.

A modelagem da volatilidade de uma série temporal pode melhorar a eficiência na estimação dos parâmetros e na precisão do intervalo de previsão.

Veremos os seguintes modelos:

ARCH: autoregressivo condicionalmente heterocedástico;

GARCH: ARCH generalizado; e

SV: volatilidade estocástica.

Características da volatilidade

A volatilidade de uma ação não é diretamente observável.

Assim, é difícil avaliar a performance de previsão nos modelos condicionalmente heterocedásticos.

Existem conglomerados de volatilidade (períodos de alta e de baixa).

A volatilidade muda de forma contínua através do tempo.

A volatilidade não diverge para o infinito. Logo, a volatilidade é geralmente estacionária.

A volatilidade parece reagir diferentemente para um aumento grande de preço ou uma queda grande de preço, conhecido como efeito de influência (*leverage effect*).

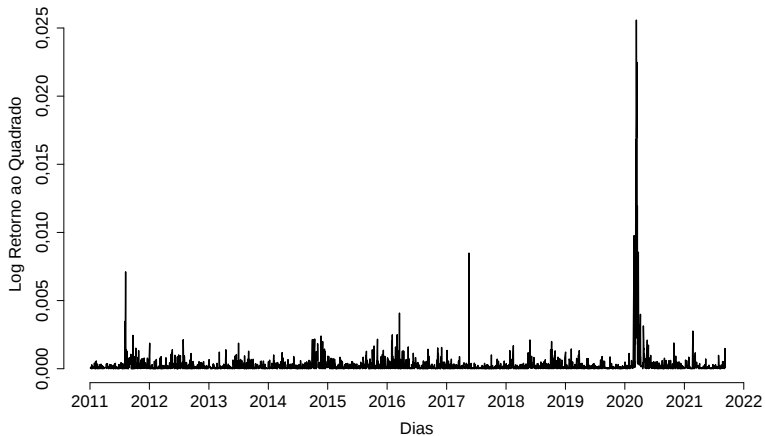
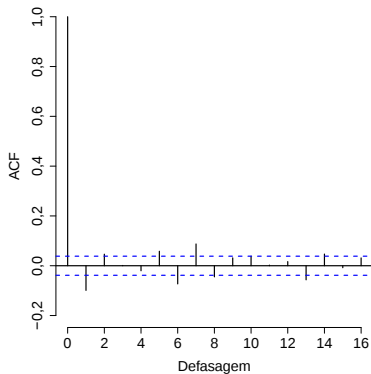
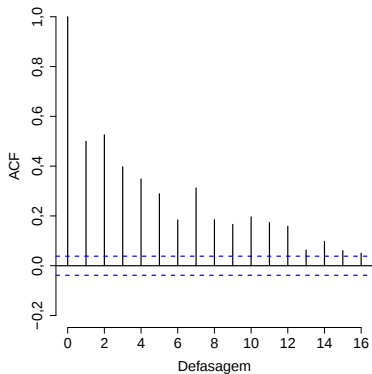


Figura: Log retornos diários ao quadrado do IBOVESPA de 4 de janeiro de 2011 até 10 de setembro de 2021.

Ver arquivo exemplo_14.r



(a) Log retornos



(b) Log retornos ao quadrado

Figura: ACF dos log retornos e log retornos ao quadrado do IBOVESPA de 4 de janeiro de 2011 até 10 de setembro de 2021.

O ACF dos retornos r_t sugere correlação serial fraca.

O ACF de r_t^2 indica que estes (retornos ao quadrado) são correlacionados.

Logo, os retornos r_t **são dependentes**.

Os modelos de volatilidade tentam capturar esta dependência na série de retornos.

Seja $\mathcal{F}_{t-1}$ a informação disponível até o tempo $t - 1$. Temos que

$$\mu_t = E(r_t | \mathcal{F}_{t-1}) \quad \text{e} \quad \sigma_t^2 = \text{Var}(r_t | \mathcal{F}_{t-1}).$$

A série de retornos tem uma estrutura de correlação baixa (ver ACF).

Podemos utilizar um modelo ARMA(p, q) e regressores. Temos $r_t = \mu_t + a_t$ e

$$\mu_t = \alpha + \sum_{j=1}^k \beta_j x_{jt} + \sum_{j=1}^p \phi_j r_{t-j} + \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t-j},$$

para algum k inteiro e x_{jt} como regressores.

Para dados diários, x_{jt} poderia ser uma variável binária representando a segunda-feira para estudar o efeito do fim de semana no retorno de uma ação.

Modelos ARCH

Um modelo ARCH(m) é dado por

$$r_t = \mu_t + a_t, \quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_2 a_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m a_{t-m}^2,$$

em que

- ε_t é uma sequência iid (ruído branco) com média 0 e variância 1 ; e
- $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_j \geq 0$ para $j > 0$.

Os coeficientes α_j devem satisfazer a certas condições para garantir que a variância incondicional de a_t seja finita.

Em geral, ε_t segue distribuição normal ou t -Student. Podemos incluir outras distribuições e também permitir a modelagem da assimetria.

Note que valores de $\{a_{t-j}^2\}_{j=1}^m$ grandes, implicam que σ_t^2 será grande.

Se σ_t^2 é grande, então a_t poderá ser grande com maior probabilidade (se comparado a um σ_t^2 menor).

Construção do modelo

Construir um modelo de volatilidade para uma série de retornos de um ativo consiste em quatro passos:

1. Especifique a equação da média testando a dependência serial nos dados. Se necessário, construir um modelo econométrico (por exemplo um modelo ARMA) para a série de retornos para remover qualquer dependência linear.
2. Use os resíduos da equação da média para testar a existência de efeitos ARCH.
3. Especifique um modelo de volatilidade se os efeitos ARCH são estatisticamente significantes e faça a estimação conjunta das equações da média e da volatilidade.
4. Verifique o modelo ajustado cuidadosamente e refine-o se necessário.

Observações

A maioria das séries de retornos tem correlação serial fraca (talvez só precisemos remover a média).

Para algumas séries de retornos diários, um modelo AR (ou MA) pode ser necessário.

Em outros casos, uma variável indicadora pode ser necessária (indicadora do dia da semana ou do mês).

Teste para efeitos ARCH: Ljung-Box

Seja $\hat{a}_t = r_t - \hat{\mu}_t$ os resíduos da equação da média.

A série $\{\hat{a}_t^2\}$ é usada para verificar a heterocedasticidade condicional.

Teste de Ljung-Box com a estatística $Q(\ell)$ para a série $\{\hat{a}_t^2\}$.

H_0 : as primeiras ℓ defasagens da ACF de $\hat{a}_t^2$ são zero.

Note que ℓ , em geral, é diferente de m (ordem do modelo ARCH).

Ver arquivo exemplo_14.r

Fraquezas dos modelos ARCH

O modelo assume que choques positivos e negativos têm o mesmo efeito na volatilidade.

As restrições do modelo ARCH são bem complicadas. **Por exemplo, para um ARCH(1) devemos ter $\alpha_1^2 \in [0, 1/3]$ se a série tiver o quarto momento finito.**

Os modelos ARCH não nos ajudam a entender a fonte de variação de uma série temporal financeira (apenas descreve o comportamento).

Os modelos ARCH, em geral, fazem previsões acima para a volatilidade porque eles respondem devagar a choques grandes e isolados da série de retornos.

Construindo um modelo ARCH

Para determinar a ordem, podemos utilizar a PACF de $\hat{a}_t^2$.

No modelo, temos

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_2 a_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m a_{t-m}^2.$$

Podemos substituir σ_t^2 por seu estimador (**tendencioso**) $\hat{a}_t^2$, e utilizar também $\hat{a}_{t-1}^2, \dots, \hat{a}_{t-m}^2$. Assim, teremos um modelo similar ao AR(m).

A estimação de modelos ARCH é feita através do método da máxima verossimilhança (condicional).

A função de verossimilhança é complicada e métodos numéricos são empregados para se obter as estimativas.

Podemos utilizar erros normais, t -Student, GED, e algumas distribuições assimétricas.

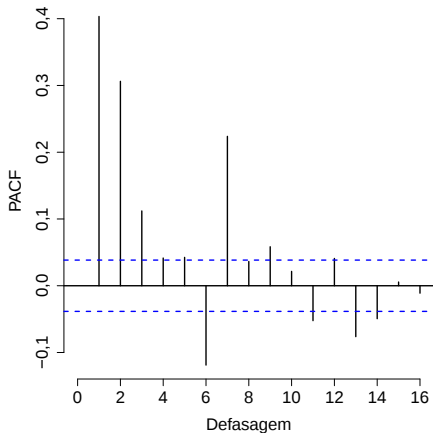


Figura: Autocorrelação parcial para os resíduos ao quadrado do modelo AR(10) ajustado aos log retornos diários do IBOVESPA de 4 de janeiro de 2011 até 10 de setembro de 2021.

Verificação do modelo

Do modelo ARCH, temos que $\frac{a_t}{\sigma_t} = \varepsilon_t$, em que ε_t é um ruído branco.

Os resíduos padronizados $\frac{\hat{a}_t}{\hat{\sigma}_t} = e_t$ devem se comportar como ruído branco.

Teste de Ljung-Box para verificar a dependência.

Teste de Jarque e Bera (no caso de normalidade).

Histogramas, *boxplot* e *qq-plot* para analisar a hipótese da distribuição (normal, *t*-Student, etc.).

Previsão

A previsão do modelo ARCH pode ser obtida recursivamente como as de um modelo AR.

Ver arquivo exemplo_15.r

Modelos GARCH

Um modelo GARCH(m, s) é dado por

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_2 a_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m a_{t-m}^2 \\ + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-2}^2 + \cdots + \beta_s \sigma_{t-s}^2,$$

em que

- ε_t é uma sequência iid com média 0 e variância 1;
- $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_j \geq 0$ para $j > 0$, e $\beta_j \geq 0$ para $j \geq 1$; e
- $\sum_{i=j}^{\max(m,s)} (\alpha_j + \beta_j) < 1$ (para a variância incondicional de a_t ser finita).

Se $s = 0$, então o modelo se reduz a um ARCH(m).

Os α_j são chamados de parâmetros ARCH e os β_j de parâmetros GARCH.

O modelo pode resultar em uma forma mais simples de descrever a volatilidade de uma série.

Em geral, aplicamos o método de máxima verossimilhança condicional.

Os modelos GARCH, após alguns cálculos, podem ser vistos como um ARMA no quadrado dos retornos.

A previsão do modelo GARCH pode ser obtida recursivamente como as de um modelo ARMA.

Na prática, os melhores ajustes são dados por modelos **GARCH(1,1)**, GARCH(2,1) ou GARCH(1,2).

Ver arquivo exemplo_16.r

Trabalho IV

Analise SOMENTE UM dos seguintes conjuntos de dados:

1. Preços da AMBEV (em ABEV3_SA.csv); ou
2. Preços da PETROBRAS (em PETR3_SA.csv).

Em qualquer caso, utilize os preços de fechamento.

Obtenha a série de log retornos $\{r_t\}$.

Ajuste os seguintes modelos GARCH(m, s) a série $\{r_t\}$:

- $m \in \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ e $s = 0$; e
- $(m, s) \in \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$.

Considere somente os modelos com erros normais.

Selecione o melhor ajuste utilizando o BIC.

Analise os coeficientes estimados, a hipótese de normalidade, a dependência na série de resíduos e a dependência na série de resíduos ao quadrado. Analise também o histograma, o *box-plot* e *qq-norm* dos resíduos (padronizados).