

ECONOMETRIA FINANCEIRA

Ralph dos Santos Silva

<http://www.ralphsilva.org/econometriafinanceira.html>

Pós-graduação
Especialização em Atuária

Instituto de Matemática
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Modelo de volatilidade estocástica

O modelo de volatilidade estocástica é uma alternativa ao modelo GARCH. Este modelo também está na classe dos modelos dinâmicos (não lineares).

O modelo básico é dado por

$$\begin{aligned}r_t &= \exp\{h_t/2\}\varepsilon_t, & \varepsilon_t &\sim \mathcal{N}(0; 1) \quad (\text{equação das observações}) \\h_t &= \alpha + \phi(h_{t-1} - \alpha) + \omega_t, & \omega_t &\sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \quad (\text{equação dos estados}),\end{aligned}$$

para $t = 1, 2, \dots, n$. Temos que

- r_t é o log retorno, isto é, $r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$;
- h_t é a log volatilidade;
- α é o nível (constante) da log volatilidade;
- ϕ é o parâmetro de persistência; e
- σ^2 é a variância das log volatilidades.

Inferência bayesiana e função de verossimilhança

Utilizaremos a abordagem bayesiana para inferir sobre as quantidades desconhecidas do modelo.

Construímos a função de verossimilhança utilizando as equações das observações e do estado:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{h} | \alpha, \phi, \sigma^2) \propto \left[\prod_{t=1}^n f(r_t | h_t) \right] \left[\prod_{t=2}^n f(h_t | h_{t-1}, \alpha, \phi, \sigma^2) \right] f(h_1 | \alpha, \phi, \sigma^2),$$

em que

$$(h_1 | \alpha, \phi, \sigma^2) \sim \mathcal{N} \left(\alpha; \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} \right),$$

pois a log volatilidade é um AR(1) estacionário.

Além disso, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ e $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$.

Distribuição a priori

Assumimos que $f(\alpha, \phi, \sigma^2) = f(\alpha)f(\phi)f(\sigma^2)$.

Poderíamos ter a restrição que $|\phi| < 1$ por ser um AR(1) estacionário.

Contudo, aplicamos a restrição que $0 \leq \phi < 1$ utilizando uma priori uniforme.

Distribuição a priori é dada por

$$\begin{array}{lll} \alpha & \sim & \mathcal{N}(0; 10.000) \quad (\text{priori vaga}) \\ \phi & \sim & \mathcal{U}(0; 1) \quad (\text{priori vaga}) \\ \sigma^2 & \sim & \mathcal{IG}(0, 01; 0, 01) \quad (\text{priori vaga}). \end{array}$$

Distribuição a posteriori

A distribuição a posteriori é dada por

$$\begin{aligned} f(\alpha, \phi, \sigma^2, \mathbf{h}|\mathbf{r}) &\propto \left[\prod_{t=1}^n f(r_t|h_t) \right] \left[\prod_{t=2}^n f(h_t|h_{t-1}, \alpha, \phi, \sigma^2) \right] \\ &\times f(h_1|\alpha, \phi, \sigma^2) f(\alpha, \phi, \sigma^2), \end{aligned}$$

em que $f(\alpha, \phi, \sigma^2)$ é a distribuição a priori.

Lembrando que $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ e $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$.

Recorreremos aos métodos de Monte Carlo via cadeias de Markov, via programa **OpenBUGS**, para fazer inferência sobre o $(h_1, h_2, \dots, h_n, \alpha, \phi, \sigma^2)$.

Exemplo

Ver arquivo exemplo_17.r



Figura: Índice BOVESPA semanal de 3 de janeiro de 2011 até 10 de setembro de 2021.

Exemplo (continuação)

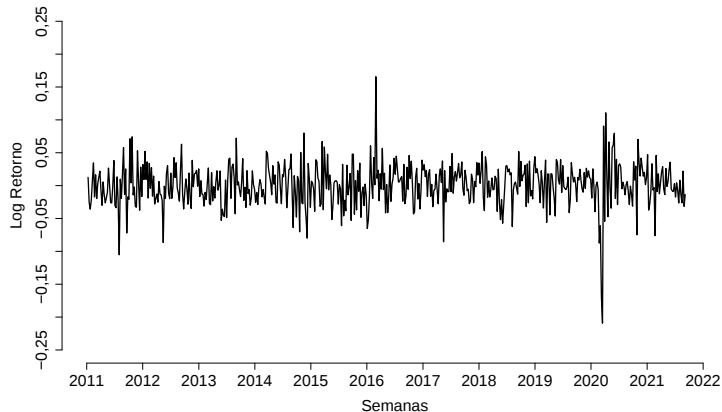


Figura: Log retornos semanais do IBOVESPA de 4 de janeiro de 2011 até 10 de setembro de 2021 ($n = 557$).

Previsão e resultados

A previsão segue o padrão mostrado para os modelos dinâmicos.

Ver arquivo volatilidade_1.odc

Parâmetro	Média	D.P.	2,5%	Mediana	97,5%
α	-7,141	0,1213	-7,386	-7,139	-6,903
ϕ	0,851	0,0606	0,708	0,860	0,941
σ^2	0,111	0,0281	0,044	0,101	0,230
r_{558}	0,0003	0,0265	-0,053	0,0002	0,053
r_{559}	0,0001	0,0281	-0,057	0,0006	0,057
r_{560}	-0,0001	0,0281	-0,057	-0,0005	0,057
h_{558}	-7,377	0,5615	-8,498	-7,372	-6,279
h_{559}	-7,347	0,5838	-8,511	-7,344	-6,213
h_{560}	-7,325	0,5989	-8,523	-7,316	-6,137

Superposição de modelos

A equação da média com estrutura de tendência estável

$$\begin{aligned}r_t &= \gamma_t + \exp\{h_t/2\}\varepsilon_t, & \varepsilon_t &\sim \mathcal{N}(0, 1) \\ \gamma_t &= \gamma_{t-1} + \xi_t, & \xi_t &\sim \mathcal{N}(0, \delta^2).\end{aligned}$$

Podemos incluir o retorno defasado como um AR(1), por exemplo

$$r_t = \gamma + \beta r_{t-1} + \exp\{h_t/2\}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Considere o modelo

$$\begin{aligned}r_t &= \gamma + \beta r_{t-1} + \exp\{h_t/2\}\varepsilon_t \\ h_t &= \alpha + \phi(h_{t-1} - \alpha) + \omega_t.\end{aligned}$$

Resultados

Ver arquivo volatilidade_2.odc

Parâmetro	Média	D.P.	2,5%	Mediana	97,5%
α	-7,140	0,1226	-7,379	-7,1400	-6,899
ϕ	0,8498	0,0618	0,696	0,8595	0,942
σ^2	0,1120	0,0504	0,044	0,1022	0,239
γ	0,0015	0,0012	-0,001	0,0015	0,003
β	-0,0025	0,0189	-0,051	-0,0001	0,035
r_{558}	0,0001	0,0279	-0,057	0,0013	0,056
r_{559}	0,0012	0,0279	-0,053	0,0010	0,061
r_{560}	0,0007	0,0287	-0,056	0,0008	0,057
h_{558}	-7,327	0,5589	-8,404	-7,335	-6,235
h_{559}	-7,301	0,5803	-8,441	-7,307	-6,162
h_{560}	-7,287	0,5940	-8,464	-7,292	-6,106