

ECONOMETRIA FINANCEIRA

Ralph dos Santos Silva

<http://www.ralphsilva.org/econometriafinanceira.html>

**Pós-graduação
Especialização em Atuária**

Instituto de Matemática
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Posição financeira

Uma **posição financeira longa** significa ter o ativo.

Uma **posição financeira curta** envolve vender um ativo que não temos.

- Isto pode ser realizado ao tomar emprestado de um investidor que comprou o ativo.
- Em uma data subsequente, o vendedor da posição curta é obrigado a comprar exatamente o mesmo número de ações que tomou emprestado para pagar de volta ao prestador.
- O pagamento requer o mesmo número de ações ao invés do mesmo número de unidades monetárias.
- Logo, o vendedor da posição curta se beneficia com o declínio do preço do ativo.

Valor em Risco: $V@R$

Existem vários tipos de riscos no mercado financeiro. Entre eles, temos

- ▶ Risco de crédito;
- ▶ Risco operacional; e
- ▶ Risco de mercado.

Valor em risco ($V@R$) está focado no risco de mercado.

$V@R$ é uma estimativa do montante que uma posição pode declinar durante um dado período de tempo.

$V@R$ pode ser usado por instituições financeiras para avaliar seus riscos, principalmente após um evento catastrófico.

$V@R$ pode ser visto como a perda máxima de uma posição financeira durante um dado período de tempo para uma dada probabilidade.

V@R em termos probabilísticos: **posição longa**

Definiremos V@R em uma abordagem probabilística.

Suponha que no tempo n estejamos interessados no risco de uma posição financeira para os próximos k períodos.

Seja $\Delta V(k)$ a mudança no valor do ativo na posição financeira do tempo n ao $n + k$.

Esta quantidade é medida em unidades monetárias e é uma variável aleatória para cada instante de tempo $n + k$.

Denotaremos a função de distribuição acumulada (FDA) de $\Delta V(k)$ por $F_k(x)$.

Definimos o V@R de uma **posição longa** sobre um horizonte de tempo k com probabilidade p como

$$p = \Pr(\Delta V(k) \leq V@R) = F_k(V@R).$$

Se p for pequeno, então V@R de uma **posição longa** provavelmente será um valor negativo, representando uma perda.

V@R em termos probabilísticos: **posição financeira curta**

O detentor de uma **posição financeira curta** sofre uma perda quando o valor do ativo cresce [i.e., $\Delta V(k) > 0$].

Definimos o V@R de uma **posição financeira curta** sobre um horizonte de tempo k com probabilidade p como

$$p = \Pr(\Delta V(k) \geq V@R) = 1 - \Pr(\Delta V(k) \leq V@R) = 1 - F_k(V@R).$$

Se p for pequeno, então V@R de uma **posição financeira curta** provavelmente será um valor positivo, representando uma perda.

Cálculo do V@R

Pela definição de V@R, estamos interessados na cauda da FDA de $F_k(x)$.

Podemos utilizar o V@R de uma **posição longa** para calcular o V@R de uma **posição curta** se usarmos a distribuição de $-\Delta V(k)$.

Portanto, só precisamos discutir métodos de cálculo de V@R para uma **posição longa**.

Para qualquer FDA univariada $F_k(x)$ e probabilidade p , tal que $0 < p < 1$, a quantidade

$$x_p = \inf\{x | F_k(x) \geq p\}$$

é chamada de p -ésimo quantil de $F_k(x)$.

inf denota o menor número real x satisfazendo $F_k(x) \geq p$.

Se a FDA é conhecida, então o V@R é simplesmente seu p -ésimo quantil, $V@R = x_p$. (Entretanto, a FDA é desconhecida na prática.)

Estudos de V@R são focados na estimação da FDA ou seu quantil, especialmente o comportamento da cauda da FDA.

Em aplicações práticas, o cálculo do V@R envolve diversos fatores:

- ◆ A probabilidade de interesse p , tal como $p = 0,01$ ou $p = 0,05$.
- ◆ O horizonte de tempo k . Pode ser dado por um comitê regulador.
- ◆ A frequência dos dados.
- ◆ A FDA $F_k(x)$ ou seus quantis.
- ◆ O montante da posição financeira ou valor de mercado do portfólio.

Entre estes fatores, a FDA $F_k(x)$ é o foco da modelagem econométrica.

Diferentes métodos para estimar a FDA resultam em abordagens diferentes para o cálculo do V@R.

A definição de V@R é dada em unidades monetárias.

Log retornos correspondem aproximadamente a mudanças percentuais no valor de uma posição financeira. Por isto, usamos os log retornos r_t na análise de dados.

O V@R calculado do quantil da distribuição de r_{n+k} dado a informação disponível no tempo n é, portanto, em porcentagem.

O montante em unidades monetárias do V@R é, então, o valor em dinheiro da posição financeira vezes o V@R da série de log retornos.

$V@R = \text{Valor} \times V@R(\text{dos log retornos})$.

Se necessário, podemos utilizar também a forma

$V@R = \text{Valor} \times [\exp(V@R(\text{dos log retornos})) - 1]$.

V@R é uma predição a respeito de uma possível perda de um portfólio em um dado horizonte de tempo.

O V@R deve ser calculado usando a distribuição preditiva dos retornos futuros da posição financeira.

Por exemplo, o V@R para um horizonte de k dias de um portfólio usando retornos diários r_t deve ser calculado usando a distribuição preditiva de r_{n+k} dado a informação disponível no tempo n .

Do ponto de vista estatístico, a distribuição preditiva leva em conta a incerteza dos parâmetros em um modelo especificado propriamente.

Entretanto, a distribuição preditiva é difícil de se obter.

A maioria dos métodos de cálculo de V@R ignora o efeito da incerteza dos parâmetros.

Cálculo do V@R: ARMA+GARCH

Suponha que o retorno diário de capitalização contínua de um portfólio segue uma distribuição condicional normal.

Seja r_t o log retorno diário e $\mathcal{F}_{t-1}$ a informação disponível até o tempo $t - 1$.

Temos que $(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) \sim \mathcal{N}(\mu_t; \sigma_t^2)$, em que μ_t e σ_t^2 são a média e a variância condicionais, respectivamente.

Podemos pensar em um modelo $\text{ARMA}(p, q) + \text{GARCH}(m, s)$ para os log retornos.

Lembre-se que $r_n[k] = r_{n+1} + \dots + r_{n+k}$, horizonte de previsão k .

A distribuição condicional de $(r_n[k]|\mathcal{F}_n)$ é normal com média $\mu_n[k]$ e variância $\sigma_n^2[k]$.

Cálculo do V@R: ARMA+GARCH com erros normais e t -Student

Dado o modelo, podemos obter então $\hat{r}_n(1)$ e $\hat{\sigma}_n^2(1)$.

Se o erro ε_t do modelo for normal, então $(r_{n+1}|\mathcal{F}_n) \sim \mathcal{N}(\hat{r}_n(1); \hat{\sigma}_n^2(1))$.

O quantis desta distribuição condicional são facilmente obtidos para o cálculo do V@R.

Por exemplo, o quantil de 5% é $\hat{r}_n(1) - 1,65 \times \hat{\sigma}_n(1)$.

Se o erro ε_t do modelo for uma t -Student ($\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$) com ν graus de liberdade, então o p -ésimo quantil é dado por (**t -Student padronizada**) $\hat{r}_n(1) - t_\nu(p) \times \hat{\sigma}_n(1)$ para $\nu > 2$.

Exemplo

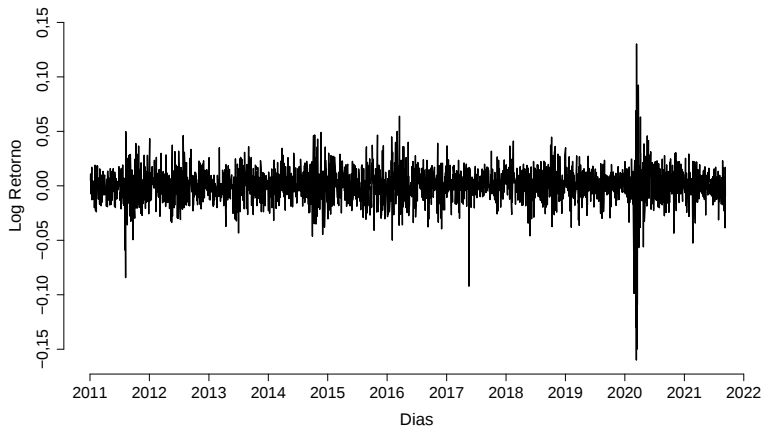


Figura: Log retornos diários do IBOVESPA de 4 de janeiro de 2011 até 10 de setembro de 2021.

Ver arquivo exemplo_18.r

De acordo com a análise feita no **R**, se os erros forem normais, temos o modelo GARCH(1,1) como bom ajuste, isto é,

$$\begin{aligned}r_t &= 0,000449058 + \hat{a}_t, \quad \hat{a}_t = \hat{\sigma}_t \hat{\varepsilon}_t \\ \hat{\sigma}_t^2 &= 0,000010336 + 0,084028532 \hat{a}_{t-1}^2 + 0,870440638 \hat{\sigma}_{t-1}^2.\end{aligned}$$

Temos $\hat{\sigma}_{2613}^2 = 0,00028587249$ e $\hat{a}_{2613} = -0,009811321$.

Assim, obtemos $\hat{r}_{2613}(1) = 0,000449058$ e $\hat{\sigma}_{2613}^2(1) = 0,000267260$.

O quantil de 5% é dado por

$$0,000449058 - 1,65 * \sqrt{0,000267260} = -0,026441146.$$

O V@R para uma **posição longa** de \$10 milhões com probabilidade 0,05 é

$$V@R = \$10.000.000 \times 0,026441146 = \$264.411.$$

O resultado mostra que, com probabilidade de 0,95, a perda potencial de manter a posição no dia seguinte é \$264.411 ou mais se assumirmos que o modelo GARCH(1,1) com erros normais se aplique.

De acordo com a análise feita no **R**, se os erros forem t -Student, temos o modelo GARCH(1,1) como bom ajuste, isto é,

$$\begin{aligned}r_t &= 0,000496769 + \hat{a}_t, \quad \hat{a}_t = \hat{\sigma}_t \hat{\varepsilon}_t \\ \hat{\sigma}_t^2 &= 0,000000318 + 0,0742065056 \hat{a}_{t-1}^2 + 0,887682773 \hat{\sigma}_{t-1}^2,\end{aligned}$$

com $\hat{\nu} = 9,025$.

Temos $\hat{\sigma}_{2613}^2 = 0,000270478$ e $\hat{a}_{2613} = -0,009859033$.

Assim, obtemos $\hat{r}_{2613}(1) = 0,000496769$ e $\hat{\sigma}_{2613}^2(1) = 0,000255630$.

O quantil de 5% é dado por

$$0,000496769 - 1,83 * \sqrt{0,000255630} = -0,028802762.$$

O V@R para uma **posição longa** de \$10 milhões com probabilidade 0,05 é

$$V@R = \$10.000.000 \times 0,028802762 = \$288.028.$$

O resultado mostra que, com probabilidade de 0,95, a perda potencial de manter a posição no dia seguinte é \$288.028 ou mais se assumirmos que o modelo GARCH(1,1) com erros t -Student se aplique.

Cálculo do V@R: volatilidade estocástica com erros normais

O modelo de volatilidade estocástica é dado por

$$r_t = \exp\{h_t/2\}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0; 1) \quad (\text{equação das observações})$$

$$h_t = \alpha + \phi(h_{t-1} - \alpha) + \omega_t, \quad \omega_t \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2) \quad (\text{equação dos estados}),$$

para $t = 1, 2, \dots, n$.

No ajuste, obtemos a previsão r_{n+k} e h_{n+k} , para $k = 1, 2, \dots$.

Daí, utilizamos a transformação a posteriori para obter:

$$V@R_{n+k} = r_{n+k} - z_p \sqrt{\exp\{h_{n+k}\}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

com z_p sendo o quantil p da normal padrão.

Para cada p , estimamos o $V@R$ a posteriori.

A tabela a seguir traz resultados para os retornos do IBOVESPA semanal.

Ver arquivo volatilidade_1_V@R.odc

Tabela: Resumo da distribuição a posteriori do Valor em Risco para diferentes quantis, $p = \{0,05; 0,025; 0,01\}$ e até 3 semanas à frente, $t = \{558; 559; 560\}$.

Quantil	V@R	Média	2,5%	97,5%
0,05	$V@R_{558}$	-424.800	-1.068.000	67.200
	$V@R_{559}$	-434.200	-1.154.000	90.930
	$V@R_{560}$	-442.900	-1.162.000	76.810
0,025	$V@R_{558}$	-506.800	-1.178.000	-7.080
	$V@R_{559}$	-517.700	-1.273.000	13.870
	$V@R_{560}$	-527.500	-1.286.000	-4.329
0,01	$V@R_{558}$	-602.100	-1.313.000	-90.370
	$V@R_{559}$	-614.800	-1.411.000	-73.860
	$V@R_{560}$	-625.800	-1.421.000	-93.300