



Inferência Estatística I

PROFESSOR: RALPH DOS SANTOS SILVA

1. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\pi) \sim \mathcal{BR}(\pi)$, tal que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ seja o vetor dos valores observados. Considere a distribuição a priori $\pi \sim \mathcal{BT}(a, b)$ com a e b conhecidos.
 - (a) Encontre a função de verossimilhança de π , $f(\mathbf{x}|\pi)$.
 - (b) Descreva a função de densidade de probabilidade a priori, $f(\pi)$.
 - (c) Calcule a distribuição marginal de $\mathbf{x}$, $f(\mathbf{x})$.
 - (d) Qual é a distribuição a posteriori de π dado $\mathbf{x}$?
 - (e) Suponha que $n = 25$ e $\sum_{i=1}^{25} x_i = 15$. Faça o gráfico da função de verossimilhança utilizando o R.
 - (f) Faça o gráfico da função de densidade de probabilidade a priori utilizando o R para $a = b = 0, 5$, para $a = b = 1$ e, por fim, para $a = 20$ e $b = 10$.
 - (g) Para os dados no Item (e) e considerando $a = b = 1$, faça o gráfico da função de densidade de probabilidade a posteriori utilizando o R.
 - (h) Quais são as estimativas de Bayes utilizando a perda quadrática, a perda absoluta e a perda 0-1?
 - (i) Qual é a estimativa de Bayes utilizando a perda multilinear com $k_1 = 1$ e $k_2 = 3$?
2. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\lambda) \sim \mathcal{P}(\lambda)$, tal que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ seja o vetor dos valores observados. Considere a distribuição a priori $\lambda \sim \mathcal{G}(a, b)$ com a e b conhecidos.
 - (a) Encontre a função de verossimilhança de λ , $f(\mathbf{x}|\lambda)$.
 - (b) Descreva a função de densidade de probabilidade a priori, $f(\lambda)$.
 - (c) Calcule a distribuição marginal de $\mathbf{x}$, $f(\mathbf{x})$.
 - (d) Qual é a distribuição a posteriori de λ dado $\mathbf{x}$?
 - (e) Suponha que $n = 30$, $\sum_{i=1}^{30} x_i = 137$ e $\sum_{i=1}^{30} \ln \Gamma(x_i + 1) = 130,5514$. Faça o gráfico da função de verossimilhança utilizando o R.

- (f) Faça o gráfico da função de densidade de probabilidade a priori utilizando o R para $a = b = 0,01$ e para $a = 1$ e $b = 0,25$.
 - (g) Para os dados no Item (e) e considerando $a = b = 0,01$, faça o gráfico da função de densidade de probabilidade a posteriori utilizando o R.
 - (h) Quais são as estimativas de Bayes utilizando a perda quadrática, a perda absoluta e a perda 0-1?
 - (i) Qual é a estimativa de Bayes utilizando a perda multilinear com $k_1 = 1$ e $k_2 = 3$?
3. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\pi) \sim \mathcal{BN}(m, \pi)$, tal que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ seja o vetor dos valores observados. Suponha que m seja conhecido.
- (a) Encontre a função de verossimilhança de π , $f(\mathbf{x}|\pi)$.
 - (b) Qual é a distribuição a priori conjugada para π ? Descreva os hiperparâmetros com letras minúsculas do início do alfabeto $(a, b, c, \dots)$.
 - (c) Calcule a distribuição marginal de $\mathbf{x}$, $f(\mathbf{x})$. Se necessário, utilize a distribuição a priori conjugada para π .
 - (d) Qual é a distribuição a posteriori de π dado $\mathbf{x}$?
 - (e) Suponha que $m = 30$, $n = 20$ e a amostra aleatória observada dada por

27	27	26	25	21	20	20	24	26	28
23	24	23	27	25	24	20	23	24	20

Faça o gráfico da função de verossimilhança utilizando o R.

- (f) Com os dados acima, faça o gráfico da função de densidade de probabilidade a posteriori utilizando o R. Utilize os valores dos hiperparâmetros igual a 0,01 e, depois, igual a 1.
4. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\pi) \sim \mathcal{GM}(\pi)$, tal que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ seja o vetor dos valores observados.
- (a) Encontre a função de verossimilhança de π , $f(\mathbf{x}|\pi)$.
 - (b) Qual é a distribuição a priori conjugada para π ? Descreva os hiperparâmetros com letras minúsculas do início do alfabeto $(a, b, c, \dots)$.
 - (c) Calcule a distribuição marginal de $\mathbf{x}$, $f(\mathbf{x})$. Se necessário, utilize a distribuição a priori conjugada para π .
 - (d) Qual é a distribuição a posteriori de π dado $\mathbf{x}$?

5. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\tau) \sim \mathcal{LP}(\mu_0, \tau)$, com μ_0 conhecido, tal que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ seja o vetor dos valores observados.
- Encontre a função de verossimilhança de τ , $f(\mathbf{x}|\tau)$.
 - Qual é a distribuição a priori conjugada para τ ? Descreva os hiperparâmetros com letras minúsculas do início do alfabeto $(a, b, c, \dots)$.
 - Calcule a distribuição marginal de $\mathbf{x}$, $f(\mathbf{x})$. Se necessário, utilize a distribuição a priori conjugada para τ .
 - Qual é a distribuição a posteriori de τ dado $\mathbf{x}$?
6. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} \mathbf{I}_{[1, \infty)}(x),$$

para $\alpha > 0$ desconhecido, tal que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ seja o vetor dos valores observados.

- Encontre a função de verossimilhança de α , $f(\mathbf{x}|\alpha)$.
 - Qual é a distribuição a priori conjugada para α ? Descreva os hiperparâmetros com letras minúsculas do início do alfabeto $(a, b, c, \dots)$.
 - Calcule a distribuição marginal de $\mathbf{x}$, $f(\mathbf{x})$. Se necessário, utilize a distribuição a priori conjugada para α .
 - Qual é a distribuição a posteriori de α dado $\mathbf{x}$?
7. * Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\theta) \sim \mathcal{U}(0, \theta)$, tal que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ seja o vetor dos valores observados.
- Encontre a função de verossimilhança de θ , $f(\mathbf{x}|\theta)$.
 - Existe uma distribuição a priori conjugada para θ ? Se existir, qual é esta distribuição? Se necessário, descreva os hiperparâmetros com letras minúsculas do início do alfabeto $(a, b, c, \dots)$.
 - Calcule a distribuição marginal de $\mathbf{x}$, $f(\mathbf{x})$. Se a distribuição a priori conjugada existir, use-a.
 - Qual é a distribuição a posteriori de θ dado $\mathbf{x}$? Se a distribuição a priori conjugada existir, use-a.

*O exercício demanda mais atenção e trabalho.