



Inferência Estatística I

PROFESSOR: RALPH DOS SANTOS SILVA

1. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\lambda) \sim \mathcal{E}(\lambda)$, tal que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ seja o vetor dos valores observados. Considere a distribuição a priori $f(\lambda) \propto \lambda^{-a} \mathbf{I}_{[0, \infty)}(\lambda)$ para $a \geq 0$.
 - (a) Mostre que a distribuição a priori para λ é imprópria para todos os valores de $a \geq 0$ (a fixo).
 - (b) Faça o gráfico da distribuição a priori no $\mathbb{R}$ para diferentes valores de a .
 - (c) A distribuição a posteriori existe? Existe para todos os valores de a ? Em caso afirmativo, essa distribuição é conhecida? Se for conhecida, quais os parâmetros?
 - (d) Se a posteriori existir, calcule a distribuição marginal de $\mathbf{x}$, $f(\mathbf{x})$. Se necessário, deixe em função de uma constante arbitrária e positiva c .
 - (e) Se a distribuição a posteriori existir e for conhecida, calcule média, mediana, moda e variância a posteriori. Quando necessário, explicita as condições para que cada uma dessas medidas exista (em função de a , n , $\mathbf{x}$, etc.).
2. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\lambda) \sim \mathcal{P}(\lambda)$, tal que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ seja o vetor dos valores observados. Considere a distribuição a priori imprópria $f(\lambda) \propto \lambda^{-a} \mathbf{I}_{[0, \infty)}(\lambda)$ para $a \geq 0$.
 - (a) A distribuição a posteriori existe? Existe para todos os valores de a ? Em caso afirmativo, essa distribuição é conhecida? Se for conhecida, quais os parâmetros?
 - (b) Se a posteriori existir, calcule a distribuição marginal de $\mathbf{x}$, $f(\mathbf{x})$. Se necessário, deixe em função de uma constante arbitrária e positiva c .
 - (c) Se a distribuição a posteriori existir e for conhecida, calcule média, mediana, moda e variância a posteriori. Quando necessário, explicita as condições para que cada uma dessas medidas exista (em função de a , n , $\mathbf{x}$, etc.).

3. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\pi) \sim \mathcal{BN}(m, \pi)$, tal que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ seja o vetor dos valores observados. Suponha que m seja conhecido. Considere a distribuição a priori $f(\pi) \propto \pi^{-1}(1 - \pi)^{-1}\mathbf{I}_{[0,1]}(\pi)$.
- Mostre que a distribuição a priori para π é imprópria.
 - Faça o gráfico da distribuição a priori no $\mathbb{R}$.
 - Mostre que a distribuição a posteriori é uma $\mathcal{BT}$ e explicita os parâmetros.
 - Calcule a distribuição marginal de $\mathbf{x}$, $f(\mathbf{x})$. Se necessário, deixe em função de uma constante arbitrária e positiva c .
 - Calcule média, mediana, moda e variância a posteriori. Quando necessário, explicita as condições para que cada uma dessas medidas exista.
4. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\pi) \sim \mathcal{GM}(\pi)$, tal que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ seja o vetor dos valores observados. Considere a distribuição a priori $f(\pi) \propto \pi^{-1}(1 - \pi)^{-1}\mathbf{I}_{[0,1]}(\pi)$.
- Mostre que a distribuição a posteriori é uma $\mathcal{BT}$ e explicita os parâmetros.
 - Calcule a distribuição marginal de $\mathbf{x}$, $f(\mathbf{x})$. Se necessário, deixe em função de uma constante arbitrária e positiva c .
 - Calcule média, mediana, moda e variância a posteriori. Quando necessário, explicita as condições para que cada uma dessas medidas exista.