



Inferência Estatística I

PROFESSOR: RALPH DOS SANTOS SILVA

1. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\theta) \sim \mathcal{U}(0, \theta)$ com θ desconhecido.
 - (a) Qual é a distribuição de $X_{(n)}$?
 - (b) Mostre que $X_{(n)}$ é um estimador consistente de θ .
 - (c) Encontre o estimador de θ pelo método dos momentos.
 - (d) O estimador de θ pelo método dos momentos é consistente? Prove ou refute!
 - (e) Compare os dois estimadores acima. Eles são admissíveis ou inadmissíveis? Justifique-se.
2. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\alpha, \beta) \sim \mathcal{U}(\alpha, \beta)$ com $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ desconhecidos. Encontre o estimador de máxima verossimilhança de α , β e $E(X|\alpha, \beta)$.
3. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\alpha, \beta) \sim \mathcal{BT}(\alpha, \beta)$ com $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ desconhecidos. Mostre que

$$T_1 = \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \quad \text{e} \quad T_2 = \sum_{i=1}^n \ln(1 - X_i)$$

são estatísticas conjuntamente suficientes minimais para (α, β) .

4. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória das distribuições abaixo. Para cada uma delas, encontre as estatísticas (conjuntamente) suficientes minimais, caso seja possível, para os respectivos parâmetros.
 - (a) $(X|\pi) \sim \mathcal{BR}(\pi)$ com $0 < \pi < 1$.
 - (b) $(X|m, \pi) \sim \mathcal{BN}(m, \pi)$ com $0 < \pi < 1$ e m conhecido (constante).
 - (c) $(X|\pi) \sim \mathcal{GM}^*(\pi)$ com $0 < \pi < 1$.
 - (d) $(X|\mu, \sigma^2) \sim \mathcal{LN}^\dagger(\mu, \sigma^2)$.
 - (e) $(X|\alpha, \beta) \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta)$ com $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

*Geométrica

†Log-Normal

5. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\mu, \sigma^2) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Considere o estimador de máxima verossimilhança para (μ, σ^2) , isto é, $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$. Utilizando o programa R, faça e responda as questões abaixo.
- (a) Escolha um valor (verdadeiro) para (μ, σ^2) .
 - (b) Gere $M = 10.000$ (dez mil) amostras de tamanho $n = 10$ (comando `rmnorm`) com o valor escolhido de (μ, σ^2) .
 - (c) Para cada uma das M amostras de tamanho n , estime a média amostral e a variância amostral. Ao final, você terá M estimativas de μ e M estimativas de σ^2 .
 - (d) Calcule a média (amostral) e a variância (amostral) para as M estimativas de μ e as M estimativas de σ^2 . O resultado está em conformidade com a parte teórica? Explique-se.
 - (e) Calcule a correlação (de Pearson) entre as estimativas de μ e σ^2 (comando `cor`). O valor que você encontrou se justifica por alguma propriedade teórica? Explique-se.
 - (f) Faça o histograma das M estimativas de μ (comando `hist` com a opção `prob=T`). O formato do histograma se justifica por alguma propriedade teórica? Explique-se. Se for possível, adicione ao histograma a função de densidade de probabilidade teórica e compare os resultados.
 - (g) Faça o histograma das M estimativas de σ^2 (comando `hist` com a opção `prob=T`). O formato do histograma se justifica por alguma propriedade teórica? Explique-se. Se for possível, adicione ao histograma a função de densidade de probabilidade teórica e compare os resultados.
 - (h) Repita os Itens de (b) até (g) para $n = 100$, depois $n = 1.000$ e, finalmente, $n = 10.000$. Quando o tamanho da amostra cresce, os resultados estão em conformidade com a parte teórica? Explique-se.

Cuidado ao escrever o código porque para $M = 10.000$ e $n = 10.000$ poderá consumir muita memória física (RAM) do computador. Ele irá travar! Note que o exercício acima é puramente didático. Na prática, o valor de M será (quase) sempre igual 1 (um).

6. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\mu, \tau) \sim \mathcal{LP}(\mu, \tau)^\ddagger$. Encontre, se possível, as estatísticas conjuntamente suficientes minimais para (μ, τ) .

[‡]Laplace (exponencial dupla)

7. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\mu, \sigma^2, \nu) \sim t_\nu(\mu, \sigma^2)$ [§].
Encontre, se possível, as estatísticas conjuntamente suficientes minimais para (μ, σ^2, ν) .

[§] t -Student