



Inferência Estatística I

PROFESSOR: RALPH DOS SANTOS SILVA

1. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\theta) \sim \mathcal{U}(0; \theta)$.

(a) Mostre que

$$W^* = \frac{(n+1)X_{(n)}}{n}, \quad \text{com} \quad X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i,$$

é um estimador não tendencioso de θ .

(b) Encontre o erro quadrático médio do estimador W^* .

(c) Compare os erros quadráticos médios de W^* , $X_{(n)}$ e $2\bar{X}$.

2. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória X . Suponha que os momentos ordinários - centrados em torno do zero - de ordem k de X , $\alpha_k(X) = E(X^k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, existem. Mostre que o momento de ordem k da amostra, definido por

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k,$$

é um estimador não tendencioso de $\alpha_k(X)$.

3. Mostre que se T é um estimador não tendencioso de θ , então $aT + b$ é um estimador não tendencioso de $a\theta + b$, sendo a e b constantes com $a \neq 0$. A estatística T^2 é um estimador tendencioso de θ^2 ?
4. Seja X uma variável aleatória com média μ e variância σ^2 . Dadas duas amostras aleatórias independentes de X de tamanhos n_1 e n_2 , com médias $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$, mostre que para $0 < a < 1$, a estatística $\tilde{X} = a\bar{X}_1 + (1-a)\bar{X}_2$ é um estimador não tendencioso de μ . Determine o valor de a que minimiza o desvio padrão de $\tilde{X}$.
5. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\lambda) \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Encontre um intervalo de confiança (bilateral) de nível $\gamma = 0,95$ para λ . $\gamma_2 = (1+\gamma)/2$, $\gamma_1 = 1 - \gamma_2$ e $\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$. Dica: encontre as distribuições de $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ e $W = 2\lambda Y$.
6. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\theta) \sim \mathcal{U}(0; \theta)$. Utilizando o estimador de máxima verossimilhança de θ , encontre um intervalo de confiança (bilateral) de nível γ para θ . Considere $\gamma_2 = (1+\gamma)/2$, $\gamma_1 = 1 - \gamma_2$ e $\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$.