



Inferência Estatística I

PROFESSOR: RALPH DOS SANTOS SILVA

1. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\mu) \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma_0^2)$ com σ_0^2 conhecido.
 - (a) Escreva a função de verossimilhança $L(\mu)$ e seu logaritmo $\ell(\mu)$.
 - (b) Calcule $\ell'(\mu|\mathbf{x})$ e $E(\ell'(\mu|\mathbf{X})|\mu)$.
 - (c) Calcule a variância exata do estimador de máxima verossimilhança para μ .
 - (d) Calcule a informação de Fisher e o limite inferior de Cramér-Rao.
 - (e) O estimador de máxima verossimilhança para μ é eficiente?
 - (f) Considere $med(\mathbf{X})$ - a mediana amostral - como estimador de μ . Este estimador é eficiente? O que podemos afirmar sobre a variância de $med(\mathbf{X})$?
2. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\mu) \sim \mathcal{LN}(\mu; \sigma_0^2)$ com σ_0^2 conhecido. O estimador de máxima verossimilhança para μ é eficiente? Justifique-se.
3. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\beta) \sim \mathcal{E}(1/\beta)$ tal que $E(X|\beta) = \beta$. O estimador pelo método dos momentos para β é eficiente? Justifique-se.
4. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\beta) \sim \mathcal{G}(\alpha_0, \beta)$ com α_0 conhecido. O estimador de máxima verossimilhança para β é eficiente? Justifique-se.
5. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória contínua com
$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1} \mathbf{I}_{[0,1]}(x), \quad \text{com } \theta > 0.$$
 - (a) Escreva a função de verossimilhança $L(\theta)$ e seu logaritmo $\ell(\theta)$.
 - (b) Calcule $\ell'(\theta|\mathbf{x})$ e $E(\ell'(\theta|\mathbf{X}))$.
 - (c) Calcule a variância exata do estimador de máxima verossimilhança para θ .
 - (d) Calcule a informação de Fisher e o limite inferior de Cramér-Rao.
 - (e) O estimador de máxima verossimilhança para θ é eficiente?

6. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória contínua com

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2\theta} \exp \left\{ -\frac{|x|}{\theta} \right\}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \quad \text{com } \theta > 0.$$

- (a) Escreva a função de verossimilhança $L(\theta)$ e seu logaritmo $\ell(\theta)$.
 - (b) Calcule $\ell'(\theta|\mathbf{x})$.
 - (c) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ .
 - (d) Calcule a $\text{Var}(\hat{\theta}|\theta)$, isto é, calcule a variância exata do estimador de máxima verossimilhança para θ .
 - (e) Calcule a informação de Fisher e o limite inferior de Cramér-Rao.
 - (f) O estimador de máxima verossimilhança para θ é eficiente?
 - (g) Encontre a distribuição amostral do estimador de máxima verossimilhança (condicional a θ).
 - (h) Encontre a distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança (condicional a θ).
7. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\alpha, \beta) \sim \mathcal{BT}(\alpha; \beta)$. Encontre a matriz de informação de Fisher para (α, β) .
8. Considere $(X|\alpha, \beta) \sim \mathcal{BT}(\alpha; \beta)$. Calcule $E(\ln(X)|\alpha, \beta)$ e $E(\ln(1-X)|\alpha, \beta)$.
9. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $(X|\alpha, \beta) \sim \mathcal{BT}(\alpha; \beta)$. Considere as estatísticas

$$T_1 = r_1(\mathbf{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \quad \text{e} \quad T_2 = r_2(\mathbf{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 - X_i).$$

Calcule os limites inferiores de Cramér-Rao para T_1 e T_2 , respectivamente.

10. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória contínua com

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} \mathbf{I}_{[1,\infty)}(x), \quad \text{com } \theta > 0.$$

- (a) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de θ .
- (b) Calcule a informação de Fisher e o limite inferior de Cramér-Rao.
- (c) O estimador de máxima verossimilhança para θ é eficiente?
- (d) Encontre a distribuição amostral do estimador de máxima verossimilhança (condicional a θ).
- (e) Encontre a distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança (condicional a θ).