

PREVISÕES BAYESIANAS E MODELOS GRÁFICOS

Ralph dos Santos Silva

<http://www.ralphsilva.org/previsoesbayesianasemodelosgraficos.html>

Instituto de Matemática
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Modelo em espaço de estados linear e gaussiano

O **modelo linear** pode ser definido como

- **Equação das observações:**

$$Y_t = \mathbf{F}_t^\top \boldsymbol{\theta}_t + v_t, \quad v_t \sim \mathcal{N}(0, V_t)$$

- **Equação do sistema:**

$$\boldsymbol{\theta}_t = \mathbf{G}_t \boldsymbol{\theta}_{t-1} + \mathbf{w}_t, \quad \mathbf{w}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{W}_t)$$

- **Priori:**

$$\boldsymbol{\theta}_0 \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_0, \mathbf{C}_0).$$

Em geral, supomos que $\{\mathbf{F}_t, V_t, \mathbf{G}_t, \mathbf{W}_t\}$ são conhecidos para todo instante de tempo t e podem depender de Ψ . Obviamente, precisamos que $\mathbf{m}_0$ e $\mathbf{C}_0$ sejam conhecidos também.

No exemplo anterior, $Y_t = \text{venda}_t$, $\mathbf{F}_t = (1, \text{preço}_t)^\top$.

$$\boldsymbol{\theta}_t = \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_t = \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{w}_t = \begin{pmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \end{pmatrix}$$

Filtro de Kalman (condicional a Ψ)

Priori:	$\boldsymbol{\theta}_0 \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_0, \mathbf{C}_0)$	
Observação:	$Y_t = \mathbf{F}_t^\top \boldsymbol{\theta}_t + v_t$	$v_t \sim \mathcal{N}(0, V_t)$
Sistema:	$\boldsymbol{\theta}_t = \mathbf{G}_t \boldsymbol{\theta}_{t-1} + \mathbf{w}_t$	$\mathbf{w}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{W}_t)$
Informação:	$(\boldsymbol{\theta}_{t-1} \mid y_{1:t-1}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_{t-1}, \mathbf{C}_{t-1})$ $(\boldsymbol{\theta}_t \mid y_{1:t-1}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}_t, \mathbf{R}_t)$	$\mathbf{a}_t = \mathbf{G}_t \mathbf{m}_{t-1}$ $\mathbf{R}_t = \mathbf{G}_t \mathbf{C}_{t-1} \mathbf{G}_t^\top + \mathbf{W}_t$
Previsão:	$(y_t \mid y_{1:t-1}) \sim \mathcal{N}(f_t, Q_t)$	$f_t = \mathbf{F}_t^\top \mathbf{a}_t$ $Q_t = \mathbf{F}_t^\top \mathbf{R}_t \mathbf{F}_t + V_t$
Posteriori:	$(\boldsymbol{\theta}_t \mid y_{1:t}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_t, \mathbf{C}_t)$	$\mathbf{m}_t = \mathbf{a}_t + \mathbf{A}_t \mathbf{e}_t$ $\mathbf{C}_t = \mathbf{R}_t - \mathbf{A}_t \mathbf{A}_t^\top Q_t$ $\mathbf{e}_t = y_t - f_t$ $\mathbf{A}_t = \mathbf{R}_t \mathbf{F}_t / Q_t$

Modelo de regressão dinâmica

Introduzimos variáveis explicativas com coeficientes variando no tempo.

A regressão dinâmica, com $Y_t = \text{vendas}_t$ e $x_t = \text{preço}_t$, é dado por

$$Y_t = \mu_t + \beta_t x_t + v_t, \quad v_t \sim \mathcal{N}(0, V_t)$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + w_{1t}$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + w_{2t},$$

em que $\mathbf{w}_t = (w_{1t}, w_{2t})^\top \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{W}_t)$.

Esse modelo é obtido com $\boldsymbol{\theta}_t = \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix}$, $\mathbf{F}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ x_t \end{pmatrix}$ e $\mathbf{G}_t = \mathbf{I}$.

Para a série de vendas de doce faremos $V_t = V$ e $\mathbf{W}_t = \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$
para todo t (independência e variâncias constantes ao longo do tempo).

Modelo de regressão dinâmica

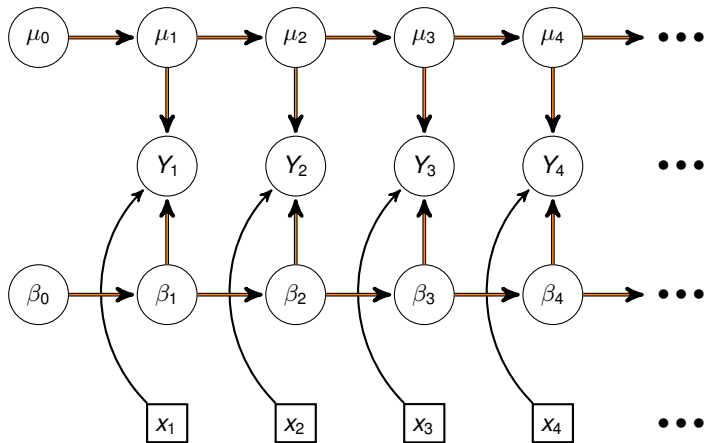


Figura: Um DAG do modelo de regressão dinâmica (condicional a $\Psi = (V, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$).

Ver arquivo exemplo_5.r

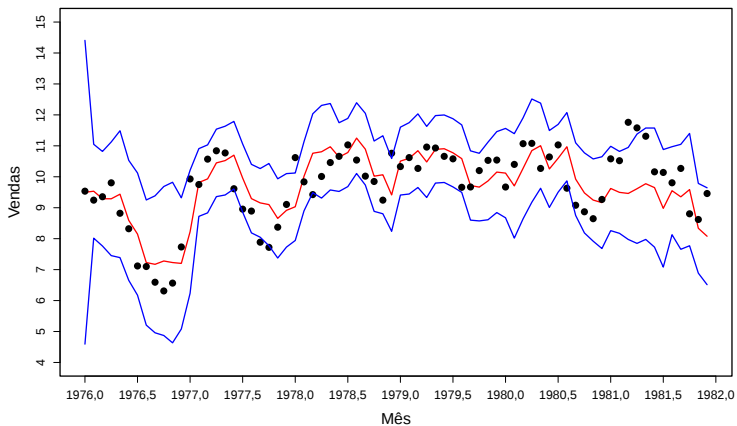


Figura: Previsão do nível de vendas, $(\mu_t|y_{1:t-1})$. A distribuição a priori em t .

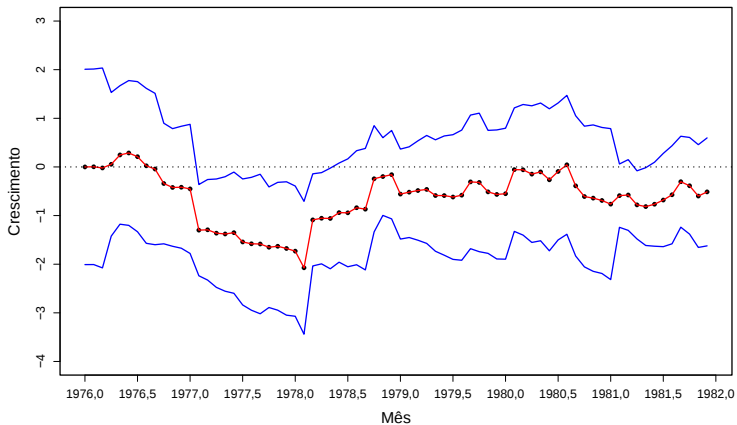


Figura: Previsão do crescimento das vendas, $(\beta_t | y_{1:t-1})$. A distribuição a priori em t .

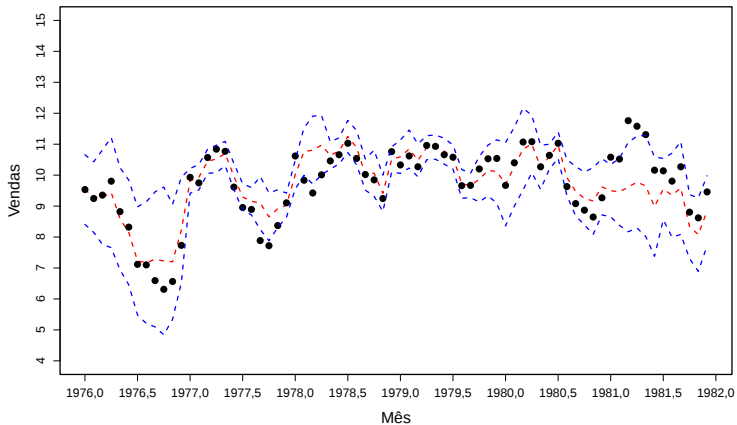


Figura: Estimativa do nível de vendas, $(\mu_t|y_{1:t})$. A distribuição a posteriori em t .

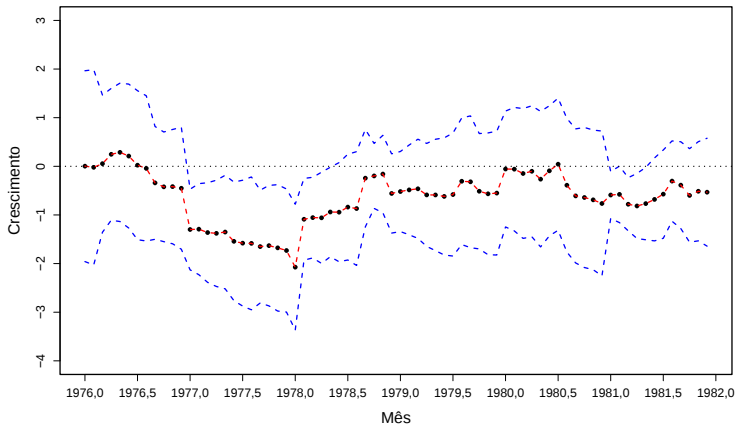


Figura: Estimativa do crescimento das vendas, $(\beta_t|y_{1:t})$. A dist. a posteriori em t .

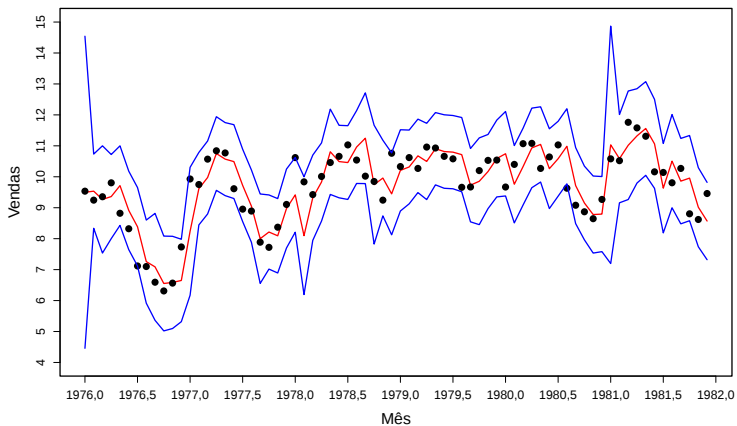


Figura: Previsão (um passo à frente) das vendas, $(y_t|y_{1:t-1})$.

Modelo de efeitos sazonais

Considere o **modelo linear** (um caso particular do modelo linear geral):

$$\begin{aligned}Y_t &= \mathbf{F}^\top \boldsymbol{\theta}_t + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, \mathbf{V}) \\ \boldsymbol{\theta}_t &= \mathbf{G} \boldsymbol{\theta}_{t-1} + \mathbf{w}_t, & \mathbf{w}_t &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{W}) \\ \boldsymbol{\theta}_0 &\sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_0, \mathbf{C}_0).\end{aligned}$$

Seja s o número de períodos nos dados. Por exemplo, $s = 12$ para dados mensais. Então, defina

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, defina $\mathbf{W} = \text{diag}(\tau^2, 0, 0, \dots, 0)$.

Os efeitos sazonais devem somar zero, assim impomos que $\mathbf{m}_0^\top \mathbf{1} = 0$.

Exemplo

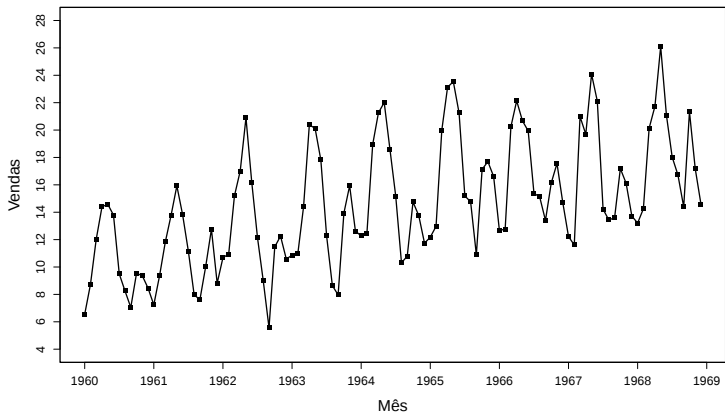


Figura: Vendas de carros nos EUA de janeiro de 1960 a dezembro de 1968.

Ver arquivo exemplo_6.r

Exemplo

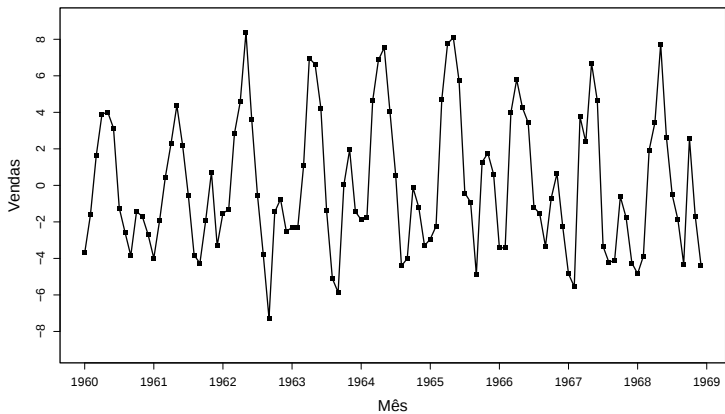


Figura: Vendas de carros sem tendência (removida por regressão linear).

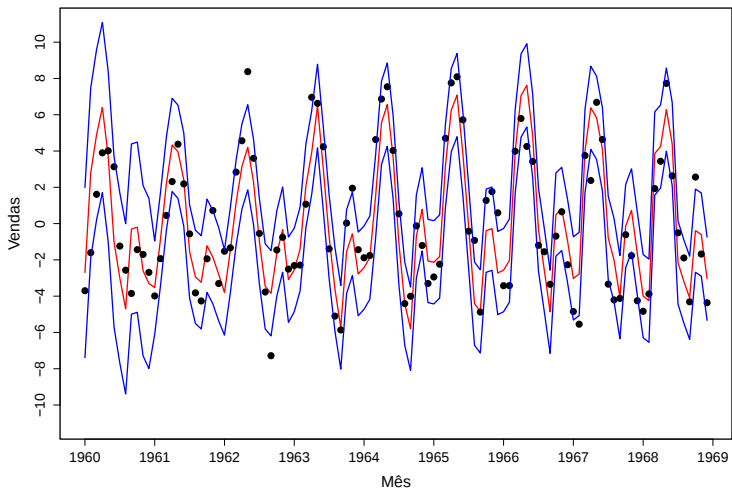


Figura: Previsão da sazonalidade das vendas, $(\theta_{1t}|y_{1:t-1})$.

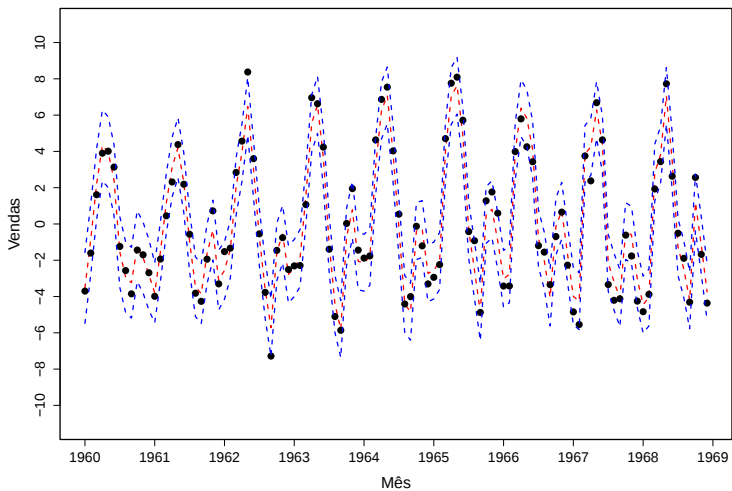


Figura: Sazonalidade das vendas, $(\theta_{1t}|y_{1:t})$. A distribuição a posteriori em t .

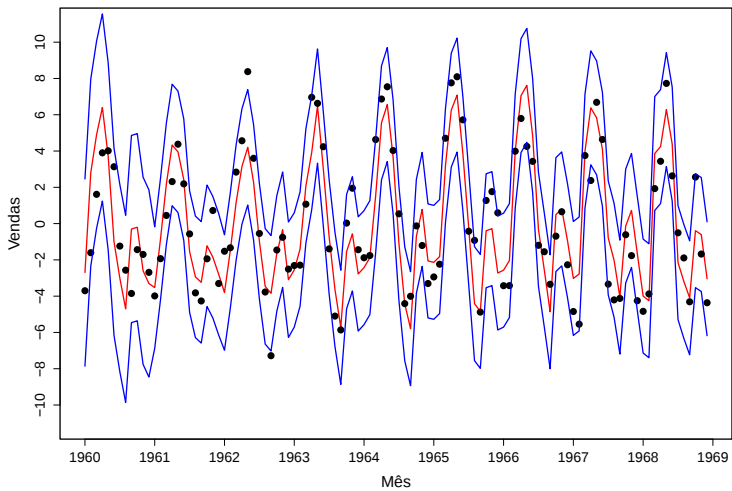


Figura: Previsão (um passo à frente) das vendas, $(y_t|y_{1:t-1})$.

Superposição de modelos

Estamos interessados em uma forma geral para estruturar e acomodar as várias componentes intervenientes em um modelo em espaço de estado. Por exemplo, variáveis causais e sazonalidade.

Muitas séries temporais exibem um comportamento bastante complexo.

Ao identificarmos as características mais marcantes, estamos caminhando na direção de formular um modelo.

A série de vendas de carros é um exemplo típico.

A tendência global parece ser de uma **variação suave do nível**.

Se agora nos concentramos na variação em torno desse nível, podemos detectar um **comportamento cíclico**.

Essa inspeção permitiu identificar duas componentes do modelo: uma componente para a **tendência** e outro para a **sazonalidade**.

A estrutura dos **modelos em espaço de estados** é apropriada para isto, pois permite que as componentes sejam modeladas separadamente e depois integradas em um modelo.

Em um exemplo com duas componentes - **tendência e sazonalidade** - estruturamos a equação das observações com dois termos:

$$Y_t = Y_{Nt} + Y_{St} + v_t.$$

Cada um dos termos é descrito na seguinte dinâmica:

$$\begin{aligned} Y_{Nt} &= \mathbf{F}_{Nt}^\top \boldsymbol{\theta}_{Nt} & \text{e} & & Y_{St} &= \mathbf{F}_{St}^\top \boldsymbol{\theta}_{St} \\ \boldsymbol{\theta}_{Nt} &= \mathbf{G}_{Nt} \boldsymbol{\theta}_{Nt-1} + \mathbf{w}_{Nt} & & & \boldsymbol{\theta}_{St} &= \mathbf{G}_{St} \boldsymbol{\theta}_{St-1} + \mathbf{w}_{St}. \end{aligned}$$

Se juntarmos esses termos, obtemos a **equação das observações**

$$Y_t = \mathbf{F}_t^\top \boldsymbol{\theta}_t + v_t$$

em que

$$\mathbf{F}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{Nt} \\ \mathbf{F}_{St} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\theta}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_{Nt} \\ \boldsymbol{\theta}_{St} \end{pmatrix}.$$

Similarmente, a **equação do sistema (integrado)** fica

$$\theta_t = \mathbf{G}_t \theta_{t-1} + \mathbf{w}_t, \quad \mathbf{w}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{W}_t)$$

em que

$$\mathbf{G}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{Nt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{St} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{W}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{Nt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_{St} \end{pmatrix}.$$

Modelos com mais componentes são construídos da mesma forma: cada termo contribui para a equação das observações e com um bloco de parâmetros para a equação do sistema.

Modelo de tendência estável e sazonalidade

O modelo de tendência estável e sazonalidade ($s = 12$) é dado por

$$\begin{aligned}Y_t &= \mu_t + \mathbf{F}_S^\top \boldsymbol{\theta}_{St} + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, V) \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + w_t, & w_t &\sim \mathcal{N}(0, \delta^2) \\ \boldsymbol{\theta}_{St} &= \mathbf{G} \boldsymbol{\theta}_{S,t-1} + \mathbf{u}_t, & \mathbf{u}_t &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{U}),\end{aligned}$$

tal que $\mu_0 \sim \mathcal{N}(m_{N0}, C_{N0})$, $\boldsymbol{\theta}_{S0} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_{S0}, \mathbf{C}_{S0})$, $\mathbf{F}_{Nt} = \mathbf{1}$, $\mathbf{G}_{Nt} = \mathbf{1}$,

$$\mathbf{F}_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G}_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, defina $\mathbf{U} = \text{diag}(\tau^2, 0, 0, \dots, 0)$.

Os efeitos sazonais devem somar zero, assim impomos que $\mathbf{m}_{S0}^\top \mathbf{1} = 0$.

Modelo de tendência estável e sazonalidade

Podemos descrever o modelo de forma conjunta como

$$\begin{aligned}Y_t &= \mathbf{F}^\top \boldsymbol{\theta}_t + v_t, & v_t &\sim \mathcal{N}(0, V) \\ \boldsymbol{\theta}_t &= \mathbf{G}\boldsymbol{\theta}_{t-1} + \mathbf{w}_t, & \mathbf{w}_t &\sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{W}) \\ \boldsymbol{\theta}_0 &\sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_0, \mathbf{C}_0),\end{aligned}$$

com $\boldsymbol{\theta}_t = (\mu_t, \boldsymbol{\theta}_{St}^\top)^\top$, $\mathbf{W} = \text{diag}(\delta^2, \tau^2, 0, \dots, 0)$,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{m}_0 = (m_{N0}, \mathbf{m}_{S0}^\top)^\top \mathbf{e}$$

$$\mathbf{C}_0 = \begin{pmatrix} C_{N0} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{S0} \end{pmatrix}.$$

Exemplo

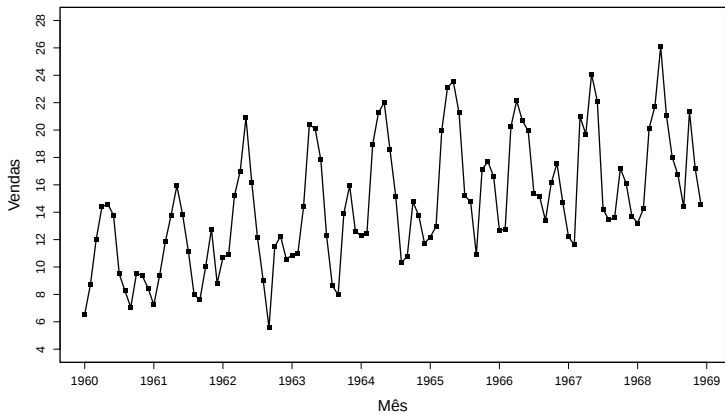


Figura: Vendas de carros nos EUA de janeiro de 1960 a dezembro de 1968.

Ver arquivo exemplo_8.r

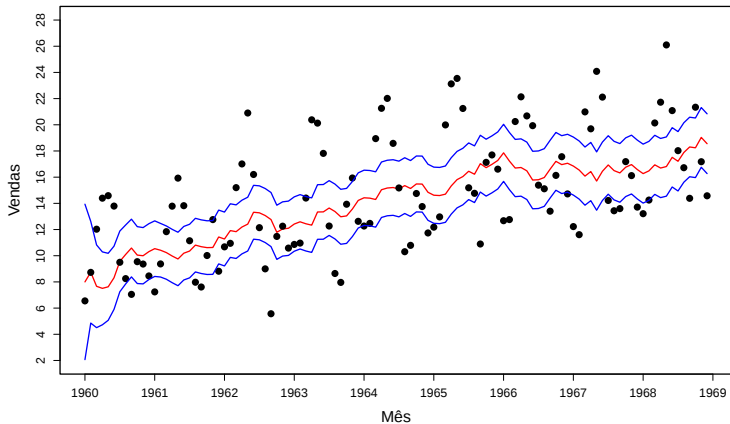


Figura: Previsão do nível de vendas, $(\mu_t | y_{1:t-1})$. A distribuição a priori em t .

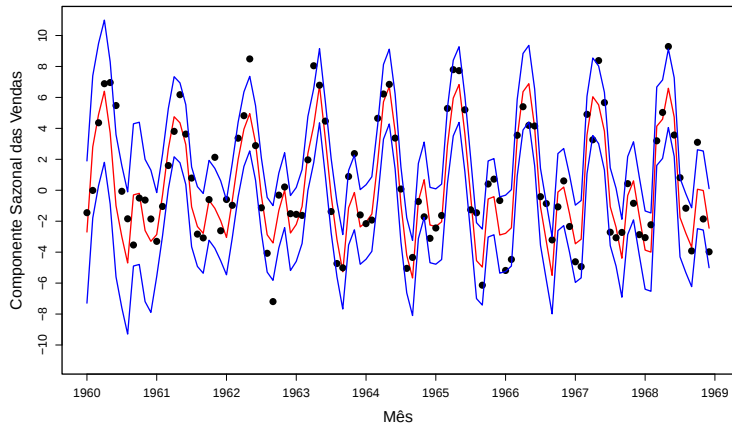


Figura: Previsão da sazonalidade das vendas, $(\theta_{2t}|y_{1:t-1})$.

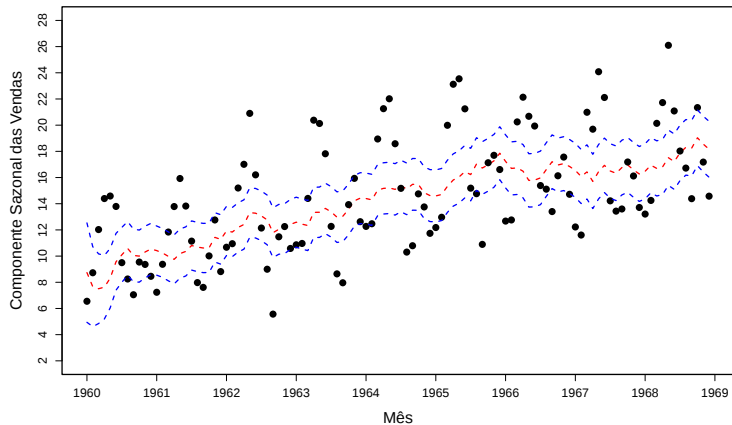


Figura: Estimativa do nível de vendas, $(\mu_t|y_{1:t})$. A distribuição a posteriori em t .

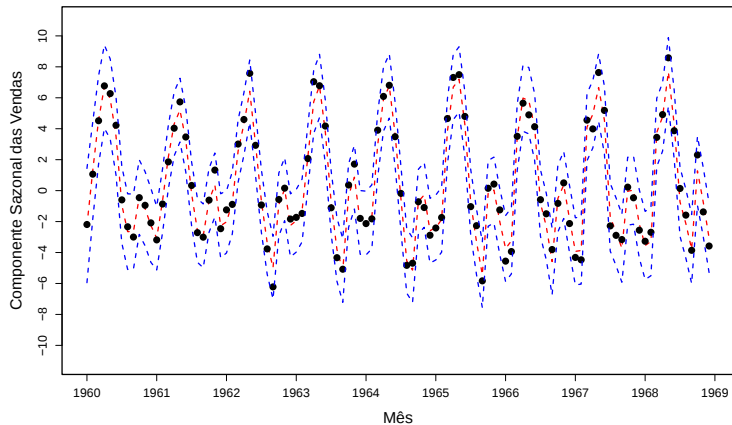


Figura: Sazonalidade das vendas, $(\theta_{2t}|y_{1:t})$. A distribuição a posteriori em t .

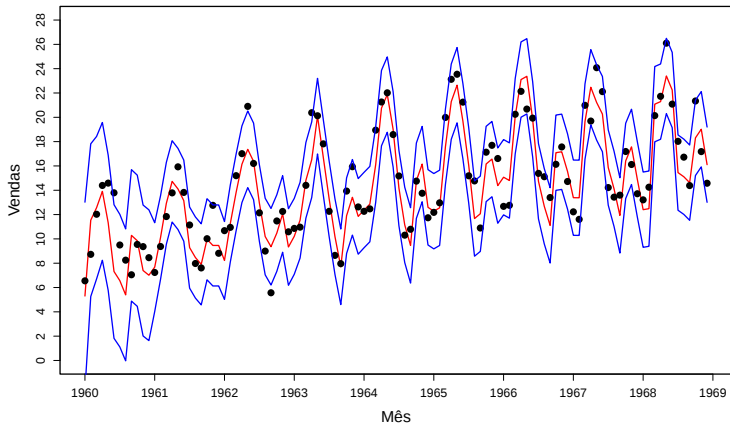


Figura: Previsão (um passo à frente) das vendas, $(y_t|y_{1:t-1})$.