

ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS

PROFESSOR: RALPH DOS SANTOS SILVA

1. Sejam X e Y variáveis aleatórias com $E(Y) = \mu$ e $E(Y^2) < \infty$.
 - (a) Mostre que a constante c que minimiza $E((Y - c)^2)$ é $c = \mu$.
 - (b) Deduza que a variável aleatória $f(X)$ que minimiza $E((Y - f(X))^2|X)$ é $f(X) = E(Y|X)$.
 - (c) Deduza que a variável aleatória $f(X)$ que minimiza $E((Y - f(X))^2)$ é $f(X) = E(Y|X)$.
2. Seja $\{\varepsilon_n\}$ uma sequência de variáveis aleatórias normais independentes com média 0 e variância σ^2 , e sejam a , b e c constantes. Quais, se algum, dos seguintes processos são estacionários? Para cada processo estacionário especifique a média e a função de autocovariância.
 - (a) $Y_t = a + b\varepsilon_t + c\varepsilon_{t-2}$.
 - (b) $Y_t = \cos(ct)\varepsilon_1 + \sin(ct)\varepsilon_2$.
 - (c) $Y_t = \cos(ct)\varepsilon_t + \sin(ct)\varepsilon_{t-1}$.
 - (d) $Y_t = a + b\varepsilon_0$.
 - (e) $Y_t = \cos(ct)\varepsilon_0$.
 - (f) $Y_t = \varepsilon_t\varepsilon_{t-1}$.

3. Seja $\{Y_t\}$ o processo médias móveis de ordem 2 dado por

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-2}$$

em que $\varepsilon_t \sim \mathcal{RB}(0, 1)$.

- (a) Encontre as funções de autocovariância e de autocorrelação deste processo quando $\theta = 0, 8$.
 - (b) Calcule a variância da média amostral $(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)/4$ quando $\theta = 0, 8$.
 - (c) Repita o Item (b) para $\theta = -0, 8$ e compare os resultados.
4. Seja $\{Y_t\}$ o processo autoregressivo de ordem 1 dado por

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

em que $|\phi| < 1$ e $\varepsilon_t \sim \mathcal{RB}(0, 1)$.

- (a) Calcule a variância da média amostral $(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)/4$ quando $\phi = 0, 9$.
- (b) Repita o Item (a) para $\phi = -0, 9$ e compare os resultados.
5. Se $\{Y_t\}$ e $\{Z_t\}$ são sequências estacionárias não correlacionadas, isto é, se $\{Y_r\}$ e $\{Z_s\}$ são não correlacionados para cada r e s , então mostre que $\{Y_t + Z_t\}$ é um processo estacionário com função de autocovariância dada pela soma das funções de autocovariância de $\{Y_t\}$ e $\{Z_t\}$.
6. Seja $\{\varepsilon_t\}$ uma sequência i.i.d. com distribuição $\mathcal{N}(0, 1)$ e defina

$$Y_t = \begin{cases} \varepsilon_t, & \text{se } t \text{ é par;} \\ (\varepsilon_{t-1}^2 - 1)/\sqrt{2}, & \text{se } t \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

- (a) Mostre que $\{Y_t\}$ é $\mathcal{RB}(0, 1)$, mas não é $\mathcal{IID}(0, 1)$.
- (b) Encontre $E(Y_{T+1}|Y_1, Y_2, \dots, Y_T)$ para T par e T ímpar, e compare os resultados.
7. Sejam $(y_1, y_2, \dots, y_T)$ os valores observados de uma série temporal nos tempos $t = 1, 2, \dots, T$ e seja $\hat{\rho}(h)$ a ACF amostral na defasagem h .
- (a) Se $y_t = a + bt$ em que a e b são constantes e $b \neq 0$, mostre que para cada $h \geq 1$ fixo,

$$\hat{\rho}(h) \rightarrow 1 \quad \text{quando } T \rightarrow \infty.$$

- (b) Se $y_t = c \cos(\omega t)$ em que c e ω são constantes ($c \neq 0$ e $\omega \in (-\pi; \pi]$), mostre que para cada $h \geq 1$ fixo,

$$\hat{\rho}(h) \rightarrow \cos(\omega h) \quad \text{quando } T \rightarrow \infty.$$

8. Se $m_t = \sum_{k=0}^p c_k t^k$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, mostre que ∇m_t é polinomial de grau $p - 1$ e assim $\nabla^{p+1} m_t = 0$.
9. Considere o filtro de médias móveis simples com pesos $a_j = (2q + 1)^{-1}$, $-q \leq j \leq q$.

- (a) Se $m_t = c_0 + c_1 t$, então mostre que $\sum_{j=-q}^q a_j m_{t-j} = m_t$.
- (b) Se ε_t , $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, são variáveis aleatórias independentes com média 0 e variância σ^2 , então mostre que as médias móveis $Y_t = \sum_{j=-q}^q a_j \varepsilon_{t-j}$ é “pequena” no sentido que $E(Y_t) = 0$ e $\text{Var}(Y_t) = \sigma^2/(2q + 1)$.

10. Seja $\{\varepsilon_t\}$ um processo estacionário com média zero e sejam a e b constantes.
- (a) Se $Y_t = a + bt + s_t + \varepsilon_t$, em que s_t é a componente sazonal com período 12, então mostre que $\nabla \nabla_{12} Y_t = (1 - B)(1 - B^{12})Y_t$ é estacionário e encontre sua função de autocovariância em termos da função de autocovariância de $\{\varepsilon_t\}$.
 - (b) Se $Y_t = (a + bt)s_t + \varepsilon_t$, em que s_t é a componente sazonal com período 12, então mostre que $\nabla_{12}^2 Y_t = (1 - B^{12})^2 Y_t$ é estacionário e encontre sua função de autocovariância em termos da função de autocovariância de $\{\varepsilon_t\}$.