

ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS

PROFESSOR: RALPH DOS SANTOS SILVA

1. Suponha que $Y_1, Y_2, \dots$, seja uma série temporal estacionária com média μ e função de autocorrelação $\rho(\cdot)$. Mostre que o melhor preditor linear de Y_{n+h} da forma $aY_n + b$ é obtido ao escolher $a = \rho(h)$ e $b = \mu(1 - \rho(h))$.
2. Mostre que o processo

$$Y_t = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad t = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

(em que A e B são variáveis aleatórias não correlacionadas com média 0 e variância 1 e $\omega \in [0, \pi]$ com ω constante), é estacionário e encontre a média e a função de autocovariância. Deduza que a função $\kappa(h) = \cos(\omega h)$, $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, é não negativa definida.

3. Encontre a função de autocovariância das seguintes séries temporais:
 - (a) $Y_t = \varepsilon_t + 0,3\varepsilon_{t-1} - 0,4\varepsilon_{t-2}$ em que $\varepsilon_t \sim \mathcal{RB}(0, 1)$.
 - (b) $Z_t = \xi_t + 1,2\xi_{t-1} - 1,6\xi_{t-2}$ em que $\xi_t \sim \mathcal{RB}(0, 1)$.
 - (c) Compare os Itens (a) e (b).
4. Encontre sequências apropriadas de variáveis aleatórias e mostre que as seguintes funções são funções de autocovariância:
 - (a) $\kappa(h) = (-1)^{|h|}$.
 - (b) $\kappa(h) = 1 + \cos\left(\frac{\pi h}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi h}{4}\right)$.
5. Seja $\{Y_t\}$ uma série temporal AR(1) mais ruído definida por $Y_t = X_t + \varepsilon_t$, em que $\varepsilon_t \sim \mathcal{RB}(0, \sigma_1^2)$ e $X_t = \phi X_{t-1} + \omega_t$ em que $\omega_t \sim \mathcal{RB}(0, \sigma_2^2)$ tal que $E(\varepsilon_s \omega_t) = 0$ para todo s e t .
 - (a) Mostre que $\{Y_t\}$ é estacionária e exiba sua função de autocovariância.
 - (b) Mostre que a série temporal $U_t = Y_t - \phi Y_{t-1}$ é correlacionada somente de ordem 1 (e portanto é um processo MA(1)).
 - (c) Mostre que Y_t é um processo ARMA(1,1) e expresse os parâmetros em função de ϕ , σ_1^2 e σ_2^2 .

6. Dada a fórmula de Bartlett,

$$w_{ij} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{ \rho(k+i)\rho(k+j) + \rho(k-i)\rho(k+j) + 2\rho(i)\rho(j)\rho^2(k) \\ - 2\rho(i)\rho(k)\rho(k+j) - 2\rho(j)\rho(k)\rho(k+i) \},$$

mostre que

$$w_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} [\rho(k+i) + \rho(k-i) - 2\rho(i)\rho(k)][\rho(k+j) + \rho(k-j) - 2\rho(j)\rho(k)].$$

7. Seja $Y_t \sim \text{MA}(1)$, isto é, $Y_t = \theta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ com $\varepsilon_t \sim \mathcal{RB}(0, \sigma^2)$. Utilizando a segunda fórmula de w_{ij} do Exercício 6, mostre que

$$w_{ii} = \begin{cases} 1 - 3\rho^2(1) + 4\rho^4(1), & \text{se } i = 1; \\ 1 + 2\rho^2(1), & \text{se } i > 1. \end{cases}$$

8. Seja $Z_t \sim \text{AR}(1)$, isto é, $Z_t = \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t$ com $|\phi| < 1$ e $\varepsilon_t \sim \mathcal{RB}(0, \sigma^2)$. Utilizando a segunda fórmula de w_{ij} do Exercício 6, mostre que

$$w_{ii} = \sum_{k=1}^i \phi^{2i} (\phi^{-k} - \phi^k)^2 + \sum_{k=i+1}^{\infty} \phi^{2k} (\phi^{-i} - \phi^i)^2 \\ = (1 - \phi^{2i})(1 + \phi^2)(1 - \phi^2)^{-1} - 2i\phi^{2i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Dica: a soma acima é particionada por causa do termo $\rho(k-i)$. É necessário o conhecimento de progressão geométrica (somas finita e infinita).

9. Seja

$$P_n Y_{n+h} = a_0 + a_1 Y_n + \dots + a_n Y_1,$$

o melhor previsor linear, baseado em uma série temporal estacionária $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, tal que a sequência $a_0, a_1, \dots, a_n$ é encontrada de forma a minimizar

$$S(a_0, \dots, a_n) = E(Y_{n+h} - a_0 - a_1 Y_n - \dots - a_n Y_1)^2.$$

(a) Mostre que

$$\frac{S(a_0, \dots, a_n)}{\partial a_j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

resulta em

$$E\left(Y_{n+h} - a_0 - \sum_{i=1}^n a_i Y_{n+1-i}\right) = 0, \quad \text{para } j = 0; \\ E\left(\left(Y_{n+h} - a_0 - \sum_{i=1}^n a_i Y_{n+1-i}\right) Y_{n+1-j}\right) = 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, n.$$

(b) Mostre que

$$a_0 = \mu \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i \right) \quad \text{e} \quad \mathbf{\Gamma}_n \mathbf{a}_n = \boldsymbol{\gamma}_n(h),$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n &= (a_1, \dots, a_n)', \\ \mathbf{\Gamma}_n &= [\gamma(i-j)]_{i,j=1}^n; \quad \text{e} \\ \boldsymbol{\gamma}_n(h) &= (\gamma(h), \gamma(h+1), \dots, \gamma(h+n-1))', \end{aligned}$$

tal que

$$P_n Y_{n+h} = \mu + \sum_{i=1}^n a_i (Y_{n+1-i} - \mu)$$

(c) Mostre que

$$\begin{aligned} E(Y_{n+h} - P_n Y_{n+h})^2 &= \gamma(0) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \gamma(i-j) \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^n a_i \gamma(h+i-1) \\ &= \gamma(0) - \mathbf{a}_n' \boldsymbol{\gamma}_n(h). \end{aligned}$$

(d) Mostre que

- i. $E(Y_{n+h} - P_n Y_{n+h}) = 0$; e
- ii. $E((Y_{n+h} - P_n Y_{n+h})Y_j) = 0, j = 1, \dots, n$.